

1.

〔解答〕

(ア)	(イ)
$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$

〔解説〕

3個の玉の取り出し方は $6 \times 5 \times 4$ 通りあり、これらは全て同様に確からしい。まず、取り出した3個の玉が赤玉2個、白玉1個である確率を求める。まず白玉が何番目に出るかを定め、次に白玉の番号を定め、次に赤玉の番号を定めると考えると、取り出し方は

$$3 \times 3 \times (3 \times 2) = 54 \text{通り}$$

であると分かる。したがって求める確率は

$$\frac{54}{120}$$

である。

(ア)

取り出した3個の玉が赤玉2個、白玉1個であり、かつ $a_1 < a_2 < a_3$ となる確率を求める。番号は1から3まであるので、 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ である。したがって、白玉が何番目に出るかを定めれば取り出し方を定められる。それは3通りなので、求める確率は

$$\frac{3}{120}$$

である。したがって求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{3}{120}}{\frac{54}{120}} = \frac{1}{18}$$

である。

(イ)

取り出した3個の玉が赤玉2個、白玉1個であり、かつ $a_1 < a_2$ かつ $a_2 > a_3$ となる確率を求める。番号は1から3まであるので、

$$(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 1), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 3, 2)$$

のいずれかである。これらの各場合について玉の取り出し方を考える。

$(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 1), (1, 3, 1), (2, 3, 2)$ に関して、 $a_1 = a_3$ より1番目に取り出した玉と3番目に取り出した玉の色は異なっていなければならない。このことに注意して玉の取り出し方を考えると、白玉を1番目に取り出すか3番目に取り出すかを考えて2通りある。一方

$(a_1, a_2, a_3) = (1, 3, 2), (2, 3, 1)$ に関して、白玉を何番目に取り出すかを考えて3通りある。したがって求める確率は

$$\frac{3 \times 2 + 2 \times 3}{120} = \frac{12}{120}$$

である。したがって求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{12}{120}}{\frac{54}{120}} = \frac{2}{9}$$

である。

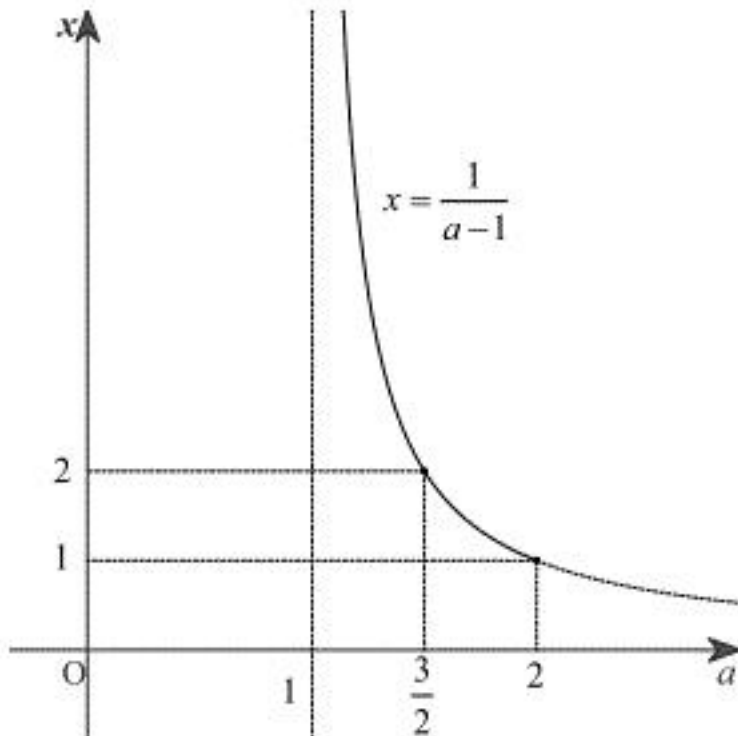
2.

(1)

まず真数条件から $1+x>0$, $ax>0$ である。 $1<a<2$ をみたす実数 a について、 $1\leq x\leq 2$ の範囲で考えるとき、この条件は必ず満たされる。このもとで、

$$\begin{aligned}\log(1+x)-\log ax &= 0 \\ \Leftrightarrow \log(1+x) &= \log ax \\ \Leftrightarrow 1+x &= ax \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{a-1}\end{aligned}$$

となる。したがって、この解が a の値によってどのように変化するかを描いたグラフは以下の図のようになる。



よって $1\leq x\leq 2$ の範囲での解の個数は、 $1<a<\frac{3}{2}$ のとき 0 個、 $\frac{3}{2}\leq a<2$ のとき 1 個となる。

(答) $1<a<\frac{3}{2}$ のとき 0 個、 $\frac{3}{2}\leq a<2$ のとき 1 個

(2)

(1)の結果を参考に、場合分けして考える。

[1] $1<a<\frac{3}{2}$ のとき

この場合、 $1\leq x\leq 2$ の範囲で方程式 $\log(1+x)-\log ax=0$ の解はない。したがって、グラフ $y=\log(1+x)$ と $y=\log ax$ はこの範囲で交わらず、 $y=\log(1+x)$ のグラフの方が必ず上にある。したがって

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_1^2 |\log(1+x)-\log ax| dx \\ &= \int_1^2 \{\log(1+x)-\log ax\} dx\end{aligned}$$

となる。ここで、 C を積分定数として

$$\begin{aligned}\int \log(1+x) dx &= \int (1+x)' \log(1+x) dx \\ &= (1+x) \log(1+x) - \int (1+x) \frac{1}{1+x} dx \\ &= (1+x) \log(1+x) - x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \log ax dx &= \int (x)' \log ax dx \\ &= x \log ax - \int x \frac{a}{ax} dx \\ &= x \log ax - x + C\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_1^2 \{\log(1+x)-\log ax\} dx \\ &= \left[(1+x) \log(1+x) - x - x \log ax + x \right]_1^2 \\ &= \{3 \log 3 - 2 \log 2a\} - (2 \log 2 - \log a) \\ &= \log \frac{27}{16a}\end{aligned}$$

となる。

[2] $\frac{3}{2}\leq a<2$ のとき

この場合、 $1\leq x\leq 2$ の範囲で方程式 $\log(1+x)-\log ax=0$ の解があり、その解は

$$x = \frac{1}{a-1}$$

である。したがってグラフ $y=\log(1+x)$ と $y=\log ax$ の位置関係は、 $x=\frac{1}{a-1}$ より左側で

は $y=\log(1+x)$ が上側にあるが、 $x=\frac{1}{a-1}$ より右側では $y=\log ax$ が上側である。したがって

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_1^2 |\log(1+x)-\log ax| dx \\ &= \int_1^{\frac{1}{a-1}} \{\log(1+x)-\log ax\} dx + \int_{\frac{1}{a-1}}^2 \{-\log(1+x)+\log ax\} dx \\ &= \left[(1+x) \log(1+x) - x \log ax \right]_1^{\frac{1}{a-1}} + \left[(1+x) \log(1+x) - x \log ax \right]_{\frac{1}{a-1}}^2 \\ &= \log \frac{a}{a-1} - (2 \log 2 - \log a) + \log \frac{a}{a-1} - (3 \log 3 - 2 \log 2a) \\ &= 5 \log a - 2 \log(a-1) - 3 \log 3\end{aligned}$$

となる。

以上[1],[2]より $S(a)$ は、 $1<a<\frac{3}{2}$ のとき $S(a)=\log \frac{27}{16a}$ であり、 $\frac{3}{2}\leq a<2$ のとき

$S(a)=5 \log a - 2 \log(a-1) - 3 \log 3$ である。

(答) $1<a<\frac{3}{2}$ のとき $S(a)=\log \frac{27}{16a}$

$\frac{3}{2}\leq a<2$ のとき $S(a)=5 \log a - 2 \log(a-1) - 3 \log 3$

(3)

まず、 $1<a<\frac{3}{2}$ のとき $S(a)=\log \frac{27}{16a}$ である。 $\frac{27}{16a}$ が $1<a<\frac{3}{2}$ において単調減少するため、

$S(a)$ もこの範囲で単調減少する。次に $\frac{3}{2}\leq a<2$ のとき $S(a)=5 \log a - 2 \log(a-1) - 3 \log 3$ である。これを a に関して微分すると、

$$\begin{aligned}S'(a) &= \frac{5}{a} - \frac{2}{a-1} \\ &= \frac{3a-5}{a(a-1)}\end{aligned}$$

となる。 $\frac{3}{2}\leq a<2$ の範囲では $a(a-1)$ が正であることを考えると、 $S'(a)$ の符号は分子により決まる。したがって $S'(a)$ は $1<a<\frac{5}{3}$ にて負であり、 $\frac{5}{3}<a<2$ にて正である。したがって

関数 $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	1	...	$\frac{3}{2}$	...	$\frac{5}{3}$	...	2
$S'(a)$		-		-	0	+	
$S(a)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって、 $S(a)$ の最小値は $a=\frac{5}{3}$ のとき $S\left(\frac{5}{3}\right)=5 \log 5 - 2 \log 2 - 6 \log 3$ となる。

(答) $a=\frac{5}{3}$ のとき $5 \log 5 - 2 \log 2 - 6 \log 3$

3.

(1)

$f(x)$ が条件「ある整数 k について $f(k-1), f(k), f(k+1)$ が整数となる」をみたすとき、

$$\begin{aligned}f(k+1)-f(k) &= a(k+1)^2+b(k+1)+c-ak^2-bk-c \\ &= 2ak+a+b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(k)-f(k-1) &= ak^2+bk+c-a(k-1)^2-b(k-1)-c \\ &= 2ak-a+b\end{aligned}$$

も整数となる。したがって整数 n, m を用いて

$$2ak+a+b=n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$2ak-a+b=m \quad \cdots \textcircled{2}$$

と書ける。①-②より、

$$2a=n-m$$

となる。したがって $2a$ は整数である。これを①へ代入して、

$$2b=2n-(2k+1)(n-m)$$

となる。したがって $2b$ は整数である。ここで $f(k)$ が整数であるので、

$$2f(k)=2ak^2+2bk+2c$$

も整数である。ここで $2a, 2b$ が整数であるので、それらに整数 k を掛けた $2ak^2, 2bk$ も整数である。したがって $2c$ も整数である。ここで、 $f(x)$ が $px-q$ で割り切れることから、因数定理より、

$$f\left(\frac{q}{p}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{q}{p}\right)^2+b\left(\frac{q}{p}\right)+c=0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。③に $2p$ を掛けて、

$$\frac{2a}{p}q^2+2bq+2cp=0$$

となる。ここで $2b, 2c$ は整数であるので、それらに整数 p, q を掛けた $2bq, 2cp$ も整数である。

したがって $\frac{2a}{p}q^2$ も整数である。ここで p, q は互いに素である自然数であるので、 q^2 は

p の1以外の因数では割り切れない。よって、 $\frac{2a}{p}$ が整数である。また、③に $2p$ を掛けて q

で割ると、

$$\frac{2a}{p}q+2b+\frac{2c}{q}p=0$$

となる。 $2b$ は整数であり、また $\frac{2a}{p}$ が整数であるので、整数 q を掛けた $\frac{2a}{p}q$ も整数である。

したがって $\frac{2c}{q}p$ も整数である。ここで p, q は互いに素である自然数であるので、 p は q の1

以外の因数では割り切れない。よって $\frac{2c}{q}$ が整数である。

(証明終)

(2)

与えられた命題は正しくない。反例として、 $a=\frac{3}{2}, b=-\frac{5}{2}, c=0, p=3, q=5$ があげられる。

この場合、 $k=0$ とすると

$$f(-1)=4, f(0)=0, f(1)=-1$$

となり、これらは全て整数である。また

$$f(x)=(3x-5)\frac{x}{2}$$

より、 $f(x)$ は $px-q$ すなわち $3x-5$ で割り切れる。しかし、 $\frac{a}{p}=\frac{1}{2}$ であり、これは整数でない。

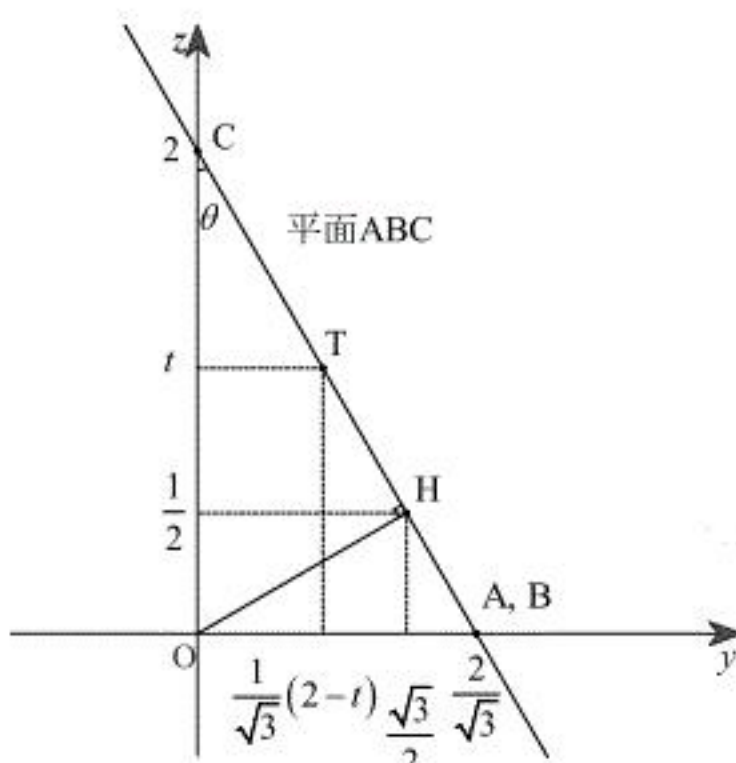
い。

(証明終)

4.

(1)

平面 $x=0$ で立体を切断した断面を考えると、次の図のようになる。



角度 θ を図のように定める。すると $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり、 $\tan \theta = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるので、

$\sin \theta = \frac{1}{2}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ と分かる。したがって

$$\begin{aligned} OH &= OC \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。線分 OH が平面 ABC と直交することから、点 H の y 座標は $OH \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、

z 座標は $OH \sin \theta = \frac{1}{2}$ である。ここで、平面 ABC と平面 $z=t$ との交線上の点であって、平面

$x=0$ 上にあるものを T とする。点 H と点 T の距離は、その z 座標の差が $\left| t - \frac{1}{2} \right|$ であるので、

$$\frac{\left| t - \frac{1}{2} \right|}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left| t - \frac{1}{2} \right|$$

となる。平面 $z=t$ が D と交わることは、点 H と点 T の距離が 1 以下であることと同値なので、求める条件は

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \left| t - \frac{1}{2} \right| \leq 1$$

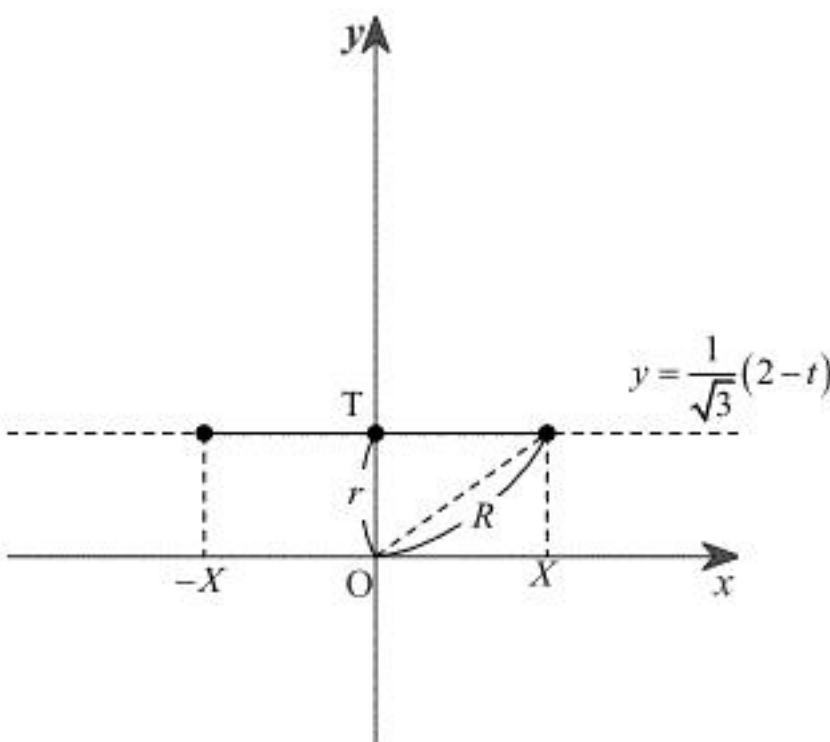
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ として、平面 $z=t$ で切断した xy 平面を考える。平面を描くと次の図のようになる。

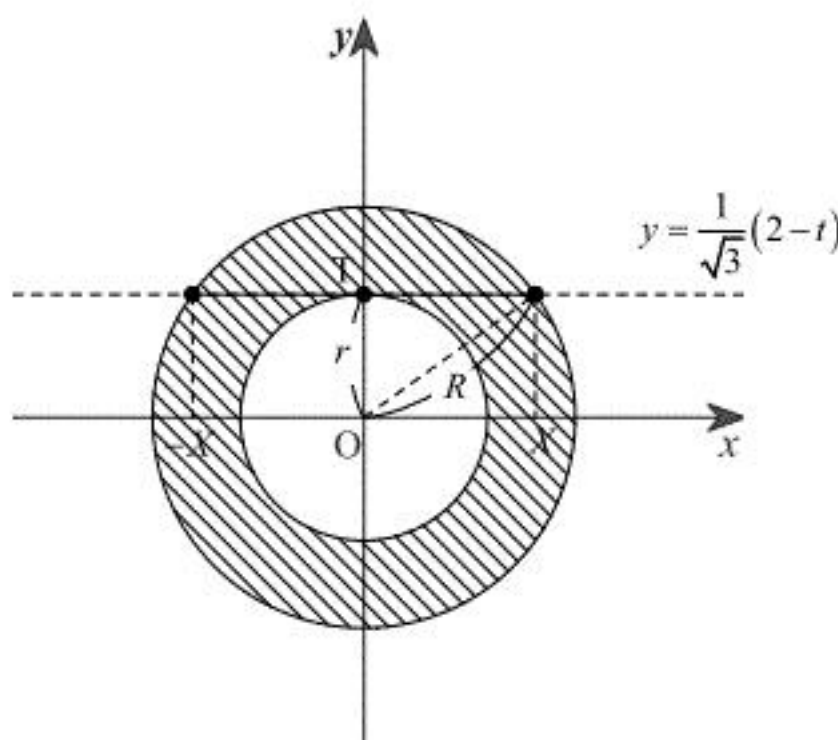


平面 ABC は $y = (2-t) \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}(2-t)$ 上にある。また D は点 H を中心とする半径 1 の円板であるので、D の円周と平面 $z=t$ との交点のうち x 座標が正である点の x 座標を X とすると、

$$\sqrt{X^2 + HT^2} = 1$$

$$\therefore X^2 = 1 - \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \left| t - \frac{1}{2} \right| \right\}^2$$

となる。したがって円板 D を平面 $z=t$ で切った断面の線は、上図の $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(2-t)$ のグラフのうちの实線部分である。この部分を点 O の周りに 1 回転させて通る部分を考えることにより、立体 K をこの平面 $z=t$ で切断した平面は次の図のようになる。



円の半径 r, R を図のようにおく。すると

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}}(2-t)$$

$$R = \sqrt{r^2 + X^2}$$

となる。立体 K の切断面の面積を求めると、

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi(R^2 - r^2) \\ &= \pi X^2 \\ &= \pi \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

となる。したがって求める立体 K の体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} S(t) dt \\ &= \int_{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \pi \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} dt \\ &= -\frac{4}{3} \pi \int_{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ t - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \left\{ t - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} dt \\ &= -\frac{4}{3} \pi \cdot \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}^3 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$$