

1.

〔解答〕

(ア)	(イ)
$\frac{1}{3}$	$\frac{31}{54}$

2.

(1)

$n \geq 3, 0 \leq x \leq 1$ のとき, $0 < \log n \leq \log(x+n) \leq \log(1+n)$ であるから,

$$\frac{x}{\log(n+1)} \leq \frac{x}{\log(x+n)} \leq \frac{x}{\log n}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\log(n+1)} dx &\leq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)} dx \leq \int_0^1 \frac{x}{\log n} dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\log(n+1)} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 &\leq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)} dx \leq \frac{1}{\log n} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2 \log(n+1)} &\leq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)} dx \leq \frac{1}{2 \log n} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

いま, $t = \log x$ とおくと, $x = e^t$ より, $\frac{dx}{dt} = e^t$ となるから,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(\log x)^2} dx &= \int \frac{1}{e^t \cdot t^2} \cdot e^t dt \\ &= \int \frac{1}{t^2} dt \\ &= -\frac{1}{t} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

より,

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx = -\frac{1}{\log x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{\log x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3)

$k \geq 3$ のとき(1)より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \log(k+1)} &\leq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)} dx \leq \frac{1}{2 \log k} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{k \log k \log(k+1)} &\leq \frac{2}{k \log k} \int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)} dx \leq \frac{1}{k (\log k)^2} \end{aligned}$$

であるから,

$$\sum_{k=n}^m \frac{1}{k \log k \log(k+1)} \leq \sum_{k=n}^m \frac{2}{k \log k} \int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)} dx \leq \sum_{k=n}^m \frac{1}{k (\log k)^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで, $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}$ とおくと, $f'(x) = -\frac{\log x + 2}{x^2 (\log x)^3}$ となり, $x \geq 2$ のときは

$\log x \geq \log 2 > 0$ より $f'(x) < 0$ であるから, $x \geq 2$ において $f(x)$ は単調減少となる。よって, $k \geq 3$ のとき, $k-1 \leq x \leq k$ において $f(x) \geq f(k)$ が成り立ち,

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^k f(x) dx &\geq \int_{k-1}^k f(k) dx \\ &= f(k) \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m f(k) &\leq \sum_{k=n}^m \int_{k-1}^k f(x) dx \\ &= \int_{n-1}^m \frac{1}{x(\log x)^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{\log x} \right]_{n-1}^m \quad (\because (2)) \\ &= \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m} \end{aligned}$$

となるから, ①より

$$\sum_{k=n}^m \frac{2}{k \log k} \int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)} dx \leq \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m}$$

である。また, 平均値の定理より, $\log(k+1) - \log k = \frac{1}{c}$ となる c ($k < c < k+1$) が存在するた

め, $\frac{1}{k+1} < \log(k+1) - \log k < \frac{1}{k}$ が成り立つ。よって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k \log k \log(k+1)} &> \frac{\log(k+1) - \log k}{\log k \log(k+1)} \\ &= \frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)} \end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m \frac{1}{k \log k \log(k+1)} &> \sum_{k=n}^m \left\{ \frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)} \right\} \\ &= \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(m+1)} \end{aligned}$$

となる。よって, ①より

$$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(m+1)} \leq \sum_{k=n}^m \frac{2}{k \log k} \int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)} dx$$

である。したがって, 以上より

$$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(m+1)} \leq \sum_{k=n}^m \frac{2}{k \log k} \int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)} dx \leq \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m}$$

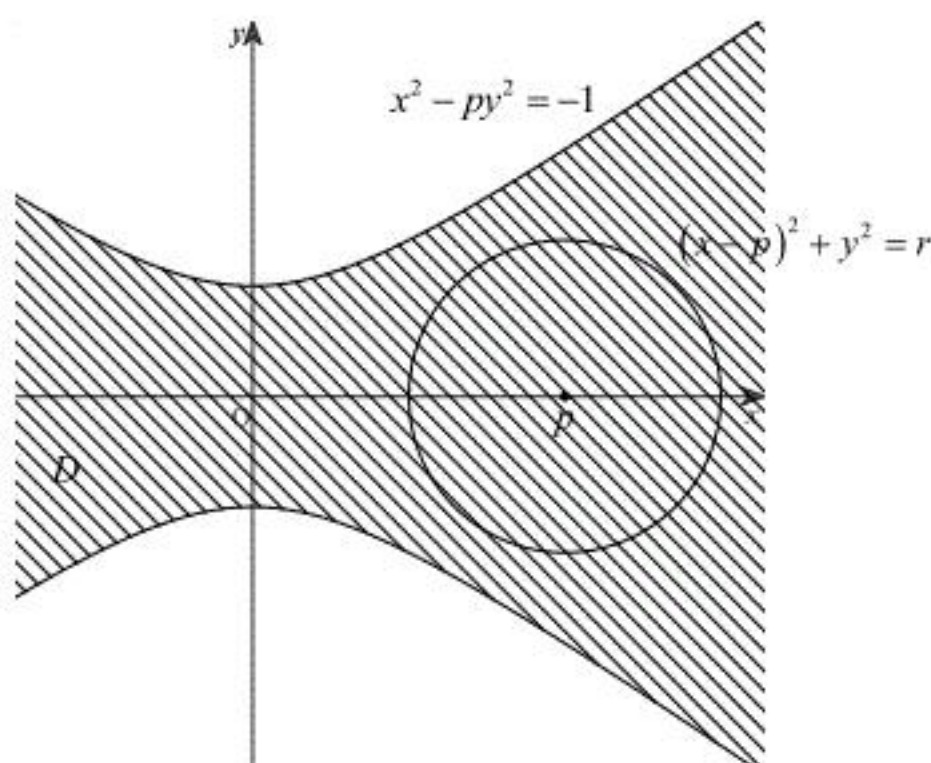
が成り立つ。

(証明終)

3.

(1)

いま、双曲線 $C_1: x^2 - py^2 = -1$ 、円 $C_2: (x-p)^2 + y^2 = r$ とすると、双曲線 C_1 と円 C_2 の位置関係は次図のようになる。



前図より、双曲線 C_1 と円 C_2 は x 軸に対して対称であるから、 $y \geq 0$ の範囲で、双曲線 C_1 のう

ち $y > 0$ の部分である曲線 $C_1': y = \sqrt{\frac{x^2+1}{p}}$ と、円 C_2 のうち $y \geq 0$ の部分である曲線

$C_2': y = \sqrt{r - (x-p)^2}$ について考えればよい。前図より、 C_1' は下に凸であり、 C_2' は上に凸で

あるから、 C_1', C_2' が共有点を 2 個もつとすると、円 $(x-p)^2 + y^2 = r$ は領域 D に含まれず、不

適である。よって、 $C_1': y = \sqrt{\frac{x^2+1}{p}}$ と $C_2': y = \sqrt{r - (x-p)^2}$ の交点は 1 個以下となる。いま、

C_1', C_2' の方程式から y を消去すると、

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x^2+1}{p}} &= \sqrt{r - (x-p)^2} \\ \Leftrightarrow (p+1)x^2 - 2p^2x + p^3 - rp + 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。 $(x-p)^2 + y^2 = r$ が領域 D に含まれるとき、①の異なる実数解は 1 個以下であるから、

$$\begin{aligned} p^4 - (p+1)(p^3 - rp + 1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow rp(p+1) - p^3 - p - 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow r &\leq \frac{p^3 + p + 1}{p(p+1)} \\ \Leftrightarrow r &\leq p - 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $p \geq 2$ であるから、 $0 < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$ 、 $0 < \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{3}$ より $0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} < 1$ となるので、

$(x-p)^2 + y^2 = r$ が領域 D に含まれるような最大の自然数 r は $r = p-1$ である。

(答) $r = p-1$

(2)

(1)より

$$(x-p)^2 + y^2 = p-1 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。 x, p は互いに異なる素数であるから、 $|x-p| \geq 1$ 、すなわち $(x-p)^2 \geq 1$ であり、 y は素数より $y \geq 2$ であるから、

$$p-1 \geq 1+2^2 \Leftrightarrow p \geq 6$$

となる。ここで、 p は素数より $p \geq 7$ であるから、奇数となる。よって、 $p-1$ は偶数である

から、 $(x-p)^2, y^2$ の偶奇が一致する。すなわち、 $x-p, y$ の偶奇が一致する。

(i) $x-p, y$ が共に奇数のとき

p は奇数より x は偶数でかつ素数であるから、 $x=2$ となる。このとき②より、

$$\begin{aligned} (2-p)^2 + y^2 &= p-1 \\ \Leftrightarrow y^2 &= -p^2 + 3p - 3 \\ \Leftrightarrow y^2 &= -\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となり、 $y^2 < 0$ となるためこれを満たす y, p は存在しない。

(ii) $x-p, y$ が共に偶数のとき

y は素数より $y=2$ である。よって、②より

$$(x-p)^2 + 4 = p-1 \Leftrightarrow (x-p)^2 = p-5$$

となる。 $p-5$ が平方数となる最小の素数 p を求める。

$p-5$	1	4	9	16	25	36	...
p	6	9	14	21	30	41	...

表より最小の素数 p は $p=41$ である。このとき

$$(x-41)^2 = 36 \Leftrightarrow x = 35, 47$$

より $(x, y, p) = (47, 2, 41)$ は②を満たす互いに異なる素数となる。

以上より、求める解は $(x, y, p) = (47, 2, 41)$ である。

(答) $(x, y, p) = (47, 2, 41)$

4.

いま、 $z + \frac{1}{z-1}$ は実数であるから、

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z-1} &= \overline{\left(z + \frac{1}{z-1} \right)} \\ \Leftrightarrow z + \frac{1}{z-1} &= \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}-1} \\ \Leftrightarrow z - \bar{z} - \frac{z - \bar{z}}{(z-1)(\bar{z}-1)} &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 z は実数ではないから、 $z \neq \bar{z}$, $z \neq 1$, $\bar{z} \neq 1$ より、

$$\begin{aligned} z - \bar{z} - \frac{z - \bar{z}}{(z-1)(\bar{z}-1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow |z-1| &= 1 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおける。ただし、 z は実数ではないから、 $\sin \theta \neq 0$ より、 $\cos \theta \neq \pm 1$ となる。ここで、

$z + \frac{1}{z-1}$ が正であることより、

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z-1} &> 0 \\ \Leftrightarrow z + \bar{z} - 1 &> 0 \quad (\because |z-1|=1) \\ \Leftrightarrow 2 \cos \theta + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &> -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

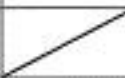
となるため、 $\cos \theta$ の取りうる値の範囲は $-\frac{1}{2} < \cos \theta < 1$ となる。ここで、

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z-1} - \frac{z-\bar{z}}{2} + 1 \right| &= \left| \bar{z}-1 - \frac{z-\bar{z}}{2} + 1 \right| \\ &= |1 + \cos \theta - 2i \sin \theta| \\ &= \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (-2 \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{-3 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 5} \end{aligned}$$

であるから、いま $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$ とおくと、 $-\frac{1}{2} < x < 1$ の範囲で $f(x)$ の増減を考えれば

よい。 $f'(x) = -6x + 2$ より、 $f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{1}{3}$ のときであるから、 $f(x)$ の増減表は

以下のようになる。

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\left(\frac{13}{4}\right)$		$\frac{16}{3}$		(4)

前表より、 $-\frac{1}{2} < x < 1$ の範囲で、 $\frac{13}{4} < f(x) \leq \frac{16}{3}$ となるから、

$$\begin{aligned} \frac{13}{4} < -3 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 5 &\leq \frac{16}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}}{2} < \sqrt{-3 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 5} &\leq \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}}{2} < \left| \frac{1}{z-1} - \frac{z-\bar{z}}{2} + 1 \right| &\leq \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{13}}{2} < \left| \frac{1}{z-1} - \frac{z-\bar{z}}{2} + 1 \right| \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$