

I

(1)

$f(x)$  を  $x$  で微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

となる。 $f'(x) = 0$  とすると

$$3x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

を得る。よって、 $f(x)$  の増減表は次のようになる。

|         |            |                       |            |                      |            |
|---------|------------|-----------------------|------------|----------------------|------------|
| $x$     | ...        | $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ | ...        | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | ...        |
| $f'(x)$ | +          | 0                     | -          | 0                    | +          |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | 極大                    | $\searrow$ | 極小                   | $\nearrow$ |

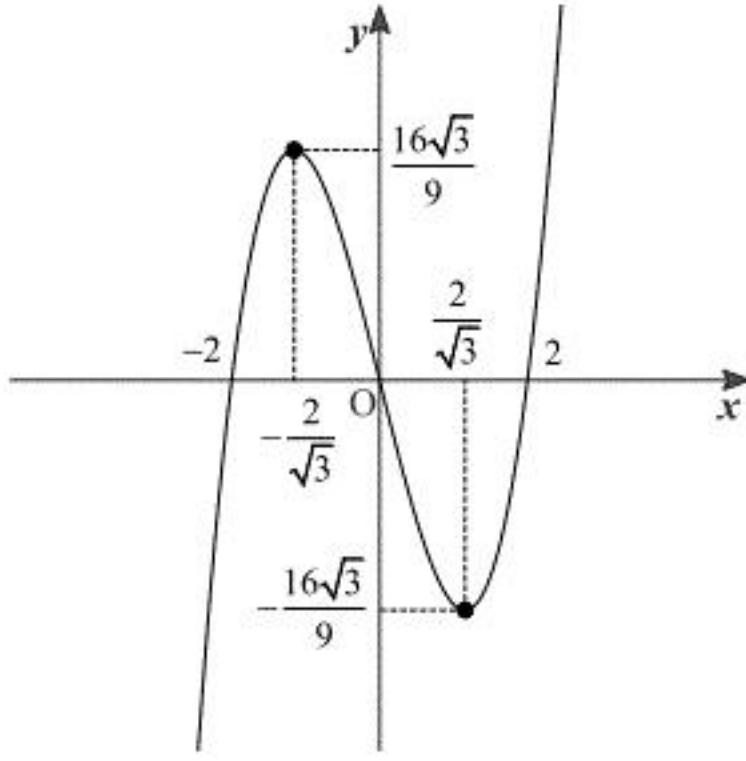
また

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ &= -\frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{16}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{16}{3\sqrt{3}} \\ &= -\frac{16\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

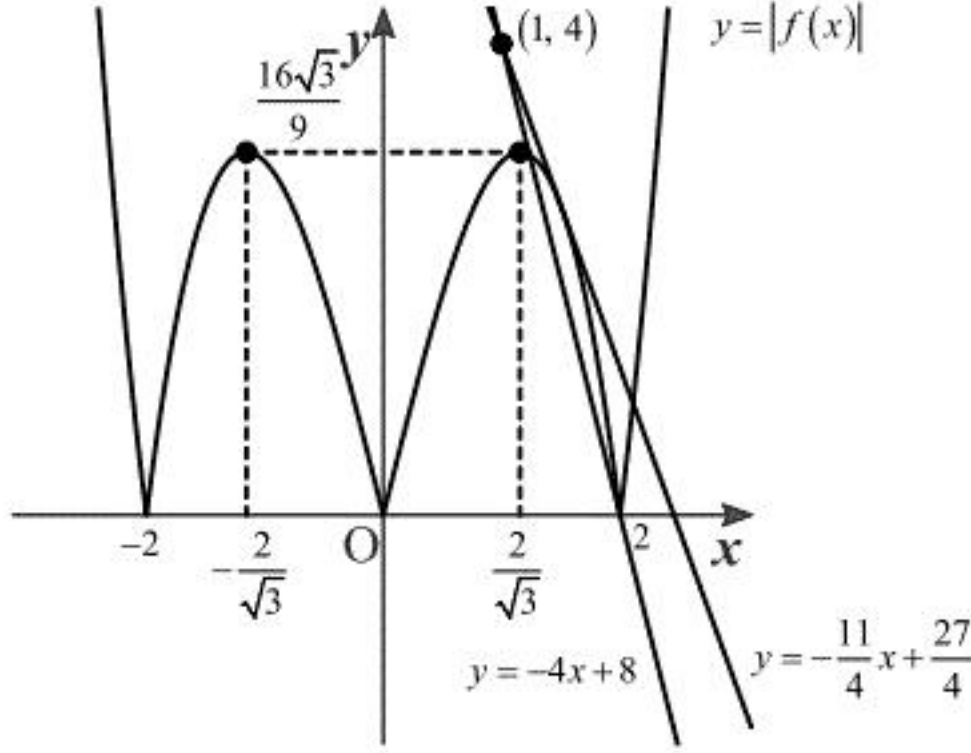
となる。したがって、 $f(x)$  は  $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$  のとき極大値  $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ 、 $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$  のとき極小値  $-\frac{16\sqrt{3}}{9}$  をとる。よって、 $y = f(x)$  のグラフは次のようになる。



(答) 極大値  $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ 、極小値  $-\frac{16\sqrt{3}}{9}$ 、グラフ：上図

(2)

$y = |f(x)|$  のグラフは、(1)のグラフから求められ、以下のようになる。



直線の傾きは負であるので、傾きを  $k$  ( $k < 0$ ) とおくと、点  $(1, 4)$  を通るこの直線の方程式は

$$y - 4 = k(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = kx - k + 4$$

・・・①

となる。この直線が点  $(2, 0)$  を通るとき、①より

$$0 = k \cdot 2 - k + 4$$

$$\therefore k = -4$$

を得る。よって、直線の式は①から

$$y = -4x + 8$$

である。ここで、 $y = -x^3 + 4x$  の点  $(2, 0)$  における接線の傾きは  $y' = -3x^2 + 4$  より  $-8$  となり、直線  $y = -4x + 8$  の傾きよりも小さくなる。よって点  $(2, 0)$  を通るとき、この直線と

$y = |f(x)|$  のグラフは  $x > 0$  の範囲において2個の共有点をもつ。次に、 $0 < x < 2$  の範囲で

$y = -f(x)$  に接するときの直線の式を求める。接点の座標を  $(t, -t^3 + 4t)$  とおくと、

$\{-f(x)\}' = -3x^2 + 4$  であるから、接線の方程式は

$$y - (-t^3 + 4t) = (-3t^2 + 4)(x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = (-3t^2 + 4)x + 2t^3$$

・・・②

となる。②が点  $(1, 4)$  を通るから

$$4 = -3t^2 + 4 + 2t^3$$

$$\Leftrightarrow 0 = t^2(2t - 3)$$

である。ここで、 $0 < t < 2$  であるので、 $t = \frac{3}{2}$  を得る。したがって、②から求める直線は

$$y = -\frac{11}{4}x + \frac{27}{4}$$

となる。ここで、この直線は点  $(2, \frac{5}{4})$  を通り、単調減少する。一方、 $y = |f(x)|$  のグラフは点

$(2, 0)$  を通り、 $x > 2$  で単調増加する。よって直線  $y = -\frac{11}{4}x + \frac{27}{4}$  と  $y = |f(x)|$  は  $x > 2$  におい

て1個だけ共有点をもつ。よって直線  $y = -\frac{11}{4}x + \frac{27}{4}$  と  $y = |f(x)|$  は  $x > 0$  において2個の共有

点をもつ。冒頭のグラフから、 $(1, 4)$  を通る直線と  $y = |f(x)|$  の共有点の個数は

$$\begin{cases} k < -4, -\frac{11}{4} < k < 0 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ -4 < k < -\frac{11}{4} \text{ のとき } 3 \text{ 個} \end{cases}$$

となる。よって直線  $y = -4x + 8$  と  $y = -\frac{11}{4}x + \frac{27}{4}$  以外に条件をみたす直線はない。したがっ

て点  $(1, 4)$  を通り、 $y = |f(x)|$  のグラフと  $x > 0$  の範囲において2個の共有点をもつ直線は、

$$y = -4x + 8 \text{ と } y = -\frac{11}{4}x + \frac{27}{4} \text{ である。}$$

(答)  $y = -4x + 8$  と  $y = -\frac{11}{4}x + \frac{27}{4}$

(1)

 $f(x)$  を微分すると

$$f'(x) = 2ax + b \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。①と問題文中の等式から

$$\begin{aligned} 2ax + b &= x \int_{-2}^1 (at^2 + bt + c) dt + \int_0^1 t(2at + b) dt \\ \Leftrightarrow 2ax + b &= x \left[ \frac{a}{3} t^3 + \frac{b}{2} t^2 + ct \right]_{-2}^1 + \left[ \frac{2a}{3} t^3 + \frac{b}{2} t^2 \right]_0^1 \\ \Leftrightarrow 2ax + b &= x \left\{ \left( \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \right) - \left( -\frac{8a}{3} + 2b - 2c \right) \right\} + \left( \frac{2a}{3} + \frac{b}{2} \right) \\ \Leftrightarrow 2ax + b &= x \left( 3a - \frac{3}{2}b + 3c \right) + \left( \frac{2a}{3} + \frac{b}{2} \right) \\ \Leftrightarrow 0 &= x \left( a - \frac{3}{2}b + 3c \right) + \left( \frac{2a}{3} - \frac{b}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。これは、恒等式であるから係数を比較して

$$\begin{cases} a - \frac{3}{2}b + 3c = 0 & \dots \textcircled{2} \\ \frac{2a}{3} - \frac{b}{2} = 0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

である。③から

$$b = \frac{4a}{3}$$

を得る。これと②から

$$\begin{aligned} a - \frac{3}{2} \cdot \frac{4a}{3} + 3c &= 0 \\ \therefore c &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、 $b = \frac{4a}{3}$ ,  $c = \frac{a}{3}$  である。

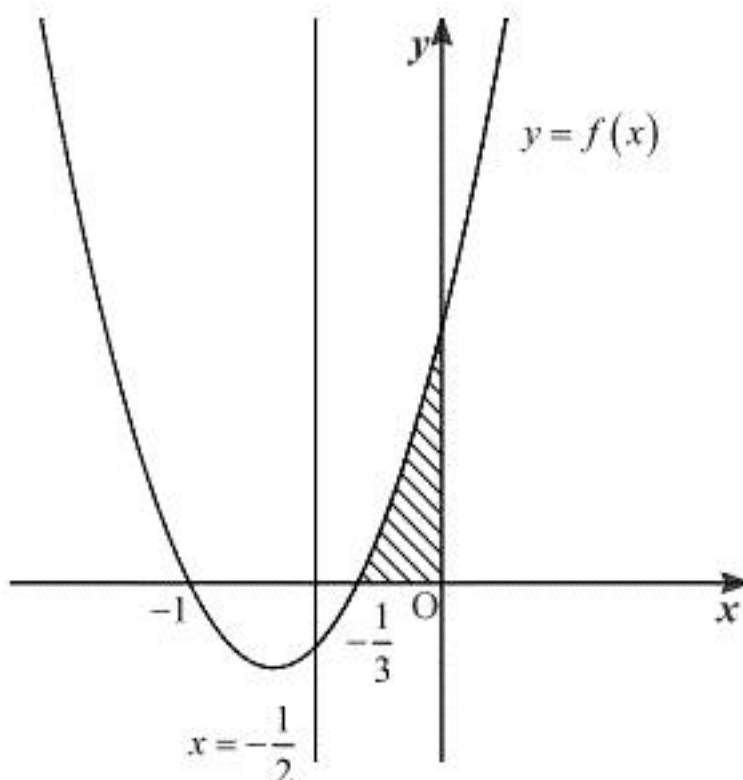
$$(\text{答}) \quad b = \frac{4a}{3}, c = \frac{a}{3}$$

(2)

(1)から

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{a}{3} \\ &= \frac{a}{3}(3x^2 + 4x + 1) \\ &= \frac{a}{3}(3x + 1)(x + 1) \end{aligned}$$

を得る。よって、 $a > 0$  より曲線  $y = f(x)$  の  $x \geq -\frac{1}{2}$  の部分と  $x$  軸および  $y$  軸とで囲まれた図形は下図の斜線部分となる。



したがって、斜線部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{3}}^0 f(x) dx &= \left[ \frac{a}{3} x^3 + \frac{2a}{3} x^2 + \frac{a}{3} x \right]_{-\frac{1}{3}}^0 \\ &= 0 - \left( -\frac{a}{81} + \frac{2a}{27} - \frac{a}{9} \right) \\ &= \frac{4}{81} a \end{aligned}$$

となる。よって、この面積が1となるときの  $a = \frac{81}{4}$  である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{81}{4}$$

(1)

$\alpha$  を  $\alpha \neq \pm 1$  をみたす実数とする。  $t = \alpha$  でベクトル  $\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$  とベクトル  $\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}$  の長さが等しくなるとき、  $|\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}| > 0, |\overrightarrow{OB} + \alpha\overrightarrow{OA}| > 0$  であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}| &= |\overrightarrow{OB} + \alpha\overrightarrow{OA}| \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}|^2 &= |\overrightarrow{OB} + \alpha\overrightarrow{OA}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\alpha\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \alpha^2 |\overrightarrow{OB}|^2 &= |\overrightarrow{OB}|^2 + 2\alpha\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \alpha^2 |\overrightarrow{OA}|^2 \\ \Leftrightarrow (|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2)(1 - \alpha^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 &= 0 \quad (\because \alpha \neq \pm 1) \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}| &= |\overrightarrow{OB}| \quad (\because |\overrightarrow{OA}| > 0, |\overrightarrow{OB}| > 0) \end{aligned}$$

となる。以上より、ベクトル  $\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$  とベクトル  $\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}$  の長さが等しくなるような  $\pm 1$  以外の実数  $t$  が存在することは  $OA = OB$  であるための必要十分条件であることが示された。

(証明終)

(2)

3点 O, A, B が三角形をなすことから  $|\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}| > 0, |\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}| > 0$  であるから、ベクトル  $\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$  とベクトル  $\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}$  が垂直となるための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})t^2 + (|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2)t + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\textcircled{1}$  を満たす  $t < -1$  である実数  $t$  が存在する必要十分条件を求める。  
  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$  とすると、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow (|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2)t = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \quad (\because |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 > 0) \end{aligned}$$

となるため、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \neq 0$  である。よって、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow t^2 + \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2}{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}} t + 1 = 0$$

となる。このとき、 $f(t) = t^2 + \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2}{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}} t + 1$  とおき、 $f(t) = 0$  の判別式を  $D$  とおくと、

$$\begin{aligned} D &= \left( \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2}{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}} \right)^2 - 4 \\ &= \frac{|\overrightarrow{OA}|^4 + 2\{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2\} + |\overrightarrow{OB}|^4}{(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \end{aligned}$$

となる。3点 O, A, B が三角形をなすことより、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|$  となるから、

$$\begin{aligned} D &> \frac{|\overrightarrow{OA}|^4 + 2\{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - 2(|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|)^2\} + |\overrightarrow{OB}|^4}{(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{(|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2)^2}{(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であり、 $f(t) = 0$  は異なる2つの実数解をもつ。また、

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 - \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2}{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}} \\ &= -\frac{|\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2}{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}} \\ &= -\frac{|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2}{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}} \end{aligned}$$

であり、3点 O, A, B が三角形をなすことより  $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 > 0$  であるから、 $f(-1) \neq 0$  とわかる。また、 $y = f(t)$  の軸は、

$$t = -\frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2}{2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}$$

である。以下、 $f(-1)$  の値に応じて場合分けを行う。

[1]  $f(-1) > 0$  のとき

$$-\frac{|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2}{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}} > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0 \quad (\because |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 > 0)$$

である。このとき、 $t < -1$  を満たす実数  $t$  が存在するとすると、軸の条件は

$$\begin{aligned} -\frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2}{2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}} &< -1 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 &< 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \quad (\because \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0) \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 &< 0 \end{aligned}$$

となり、矛盾が生じる。したがって、 $t < -1$  を満たす実数  $t$  は存在しない。

[2]  $f(-1) < 0$  のとき

$$-\frac{|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2}{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}} < 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0 \quad (\because |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 > 0)$$

である。このとき、 $t < -1$  を満たす実数  $t$  は常に存在する。

[1], [2]より、 $t < -1$  である実数  $t$  が存在するための必要十分条件は、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$$

となる。 $0^\circ < \angle AOB < 180^\circ$  であるからこの式は  $\angle AOB < 90^\circ$  と同値になる。以上より、ベクトル  $\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$  とベクトル  $\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}$  が垂直になるような  $t < -1$  である実数  $t$  が存在することは  $\angle AOB < 90^\circ$  であるための必要十分条件であることが示された。

(証明終)

(1)

点Pが4回目の操作で原点に戻る確率は、硬貨A, Bがそれぞれ表と裏を2回ずつ出す操作のときの確率であるから、その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot {}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot {}_4C_2 = \frac{9}{64}$$

となる。また、点Pが4回目の操作で原点にもどるが、原点に戻るのが2度目である確率は、硬貨A, Bがそれぞれ表, 裏, 表, 裏または表, 裏, 裏, 表または裏, 表, 表, 裏または裏, 表, 裏, 表の順に出る確率であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 4 = \frac{1}{16}$$

である。したがって、点Pが4回目の操作で初めて原点にもどる確率は、

$$\frac{9}{64} - \frac{1}{16} = \frac{5}{64}$$

となる。

(答)  $\frac{5}{64}$

(2)

点Pの座標を $(s, t)$ とおくと、6回目の操作で

$$-6 \leq s \leq 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$-6 \leq t \leq 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

の範囲に点Pは存在する。点Pが直線 $y = 4 - x$ の上にあるとき

$$t = 4 - s \quad \dots \textcircled{3}$$

である。②と③から

$$-6 \leq 4 - s \leq 6$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq s \leq 10 \quad \dots \textcircled{4}$$

を得る。①と④から

$$-2 \leq s \leq 6$$

となる。また、偶数回の操作では点Pの $x$ 座標,  $y$ 座標はそれぞれ偶数となる。よって、点Pが6回目の操作で直線 $y = 4 - x$ の上にあるときの6回目の操作終了時の点Pの座標は

$$(-2, 6), (0, 4), (2, 2), (4, 0), (6, -2)$$

である。したがって、点Pが6回目の操作で直線 $y = 4 - x$ の上にある確率は

$$\begin{aligned} & {}_6C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot {}_6C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot {}_6C_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot {}_6C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot {}_6C_2 \\ & + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot {}_6C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot {}_6C_3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot {}_6C_2 \\ & = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} ({}_6C_2 + {}_6C_3 \cdot {}_6C_1 + {}_6C_2 \cdot {}_6C_2 + {}_6C_3 \cdot {}_6C_1 + {}_6C_2) \\ & = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot 495 \\ & = \frac{495}{4096} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\frac{495}{4096}$

(1)

問題から

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( p + \frac{k}{n} \right)^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( p^2 + \frac{2kp}{n} + \frac{k^2}{n^2} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left\{ p^2 n + \frac{2p}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\} \\
&= p^2 + \frac{p(n+1)}{n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\
&= p^2 + p + \frac{p}{n} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \\
&= p^2 + p + \frac{p}{n} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \quad \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

を得る。ここで、①から

$$\begin{aligned}
a_n - \left\{ \frac{1}{12} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \right\} &= \left( p^2 + p + \frac{p}{n} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) - \left\{ \frac{1}{12} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \right\} \\
&= p^2 + p + \frac{p}{n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} \\
&= \left( p + \frac{n+1}{2n} \right)^2 - \left( \frac{n+1}{2n} \right)^2 + \left( \frac{n+1}{2n} \right)^2 \\
\therefore a_n - \left\{ \frac{1}{12} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \right\} &= \left( p + \frac{n+1}{2n} \right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

となる。したがって、すべての実数  $p$  に対して、 $a_n \geq \frac{1}{12} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) (n=1, 2, \dots)$  が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

 $p = \frac{5}{3}$  のとき、①から

$$\begin{aligned}
a_n &= \left( \frac{5}{3} \right)^2 + \frac{5}{3} + \frac{5}{3n} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \\
&= \frac{43}{9} + \frac{13}{6n} + \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

である。よって、 $a_n < 5$  となるとき

$$\begin{aligned}
\frac{43}{9} + \frac{13}{6n} + \frac{1}{6n^2} &< 5 \\
\Leftrightarrow -\frac{2}{9} + \frac{13}{6n} + \frac{1}{6n^2} &< 0 \\
\Leftrightarrow -4n^2 + 39n + 3 &< 0 \quad (\because n^2 > 0)
\end{aligned}$$

を得る。これを解くと

$$n < \frac{39 - \sqrt{1569}}{8}, \frac{39 + \sqrt{1569}}{8} < n$$

となる。 $39 < \sqrt{1569} < 40$  であることと  $n$  が自然数であることから  $10 \leq n$  である。したがって、 $p = \frac{5}{3}$  のとき、 $a_n < 5$  となる最小の  $n$  の値は 10 である。(答)  $n=10$