

(1)

数学的帰納法を利用して、 $a_n = d_n$ および $b_n = c_n$ であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ より $a_1 = d_1 = 1, b_1 = c_1 = 4$ であるから $n=1$ のとき $a_n = d_n$ および $b_n = c_n$ は確かに成立する。

[2] $n=k$ のとき (k は自然数)

$n=k$ のとき $a_k = d_k$ および $b_k = c_k$ が成立しているとする。このとき A^k は a_k, b_k をもちい

て $A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ とできる。ここで $A^{k+1} = A^k \cdot A$ より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ c_{k+1} & d_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_k + 4b_k & 4a_k + b_k \\ 4a_k + b_k & a_k + 4b_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、 $a_k = d_k$ および $b_k = c_k$ が成立しているとき $a_{k+1} = d_{k+1}$ および $b_{k+1} = c_{k+1}$ も成立する。

以上[1], [2]より $a_n = d_n$ および $b_n = c_n$ が成立することが示された。

(証明終)

(2)

(1)より $a_{n+1} = a_n + 4b_n, c_{n+1} = 4a_n + b_n, p_n = \frac{a_n}{b_n}$ である。よって $a_1 = 1, b_1 = 4$ と合わせて $b_n > 0$ で

ある。したがって

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{a_{n+1}}{c_{n+1}} \\ &= \frac{a_n + 4b_n}{4a_n + b_n} \\ &= \frac{\frac{a_n}{b_n} + 4}{4\frac{a_n}{b_n} + 1} \\ &= \frac{p_n + 4}{4p_n + 1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = \frac{p_n + 4}{4p_n + 1}$$

(3)

$q_{n+1} = \frac{1}{p_{n+1} - 1}$ に $p_{n+1} = \frac{p_n + 4}{4p_n + 1}$ を代入すると、 q_{n+1} は p_n を用いて

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{1}{\frac{p_n + 4}{4p_n + 1} - 1} \\ &= \frac{4p_n + 1}{(p_n + 4) - (4p_n + 1)} \\ &= \frac{4p_n + 1}{-3p_n + 3} \end{aligned}$$

と表される。ここで

$$q_n = \frac{1}{p_n - 1} \Leftrightarrow p_n = \frac{1}{q_n} + 1$$

であるから

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{4p_n + 1}{-3p_n + 3} \\ &= \frac{4\left(\frac{1}{q_n} + 1\right) + 1}{-3\left(\frac{1}{q_n} + 1\right) + 3} \\ &= \frac{\frac{4}{q_n} + 5}{-\frac{3}{q_n}} \\ &= -\frac{1}{3}(5q_n + 4) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad q_{n+1} = -\frac{1}{3}(5q_n + 4)$$

(4)

q_n について、(3)で得た q_{n+1} の式を式変形すると

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= -\frac{1}{3}(5q_n + 4) \\ \Leftrightarrow q_{n+1} + \frac{1}{2} &= -\frac{5}{3}\left(q_n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} q_1 + \frac{1}{2} &= \frac{1}{p_1 - 1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\frac{a_1}{b_1} - 1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4} - 1} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

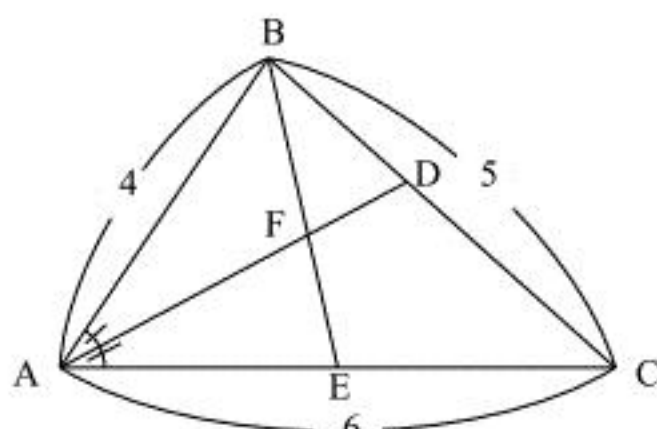
より数列 $\left\{q_n + \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $-\frac{5}{6}$ 、公比 $-\frac{5}{3}$ の等比数列である。これより数列 $\{q_n\}$ の一般項は

$q_n = -\frac{5}{6}\left(-\frac{5}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}$ である。これと $p_n = \frac{1}{q_n} + 1$ より数列 $\{p_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{-\frac{5}{6}\left(-\frac{5}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}} + 1 \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{5}{3}\right)^n - 1\right\}} + 1 \\ &= \frac{\left(-\frac{5}{3}\right)^n + 1}{\left(-\frac{5}{3}\right)^n - 1} \\ &= \frac{(-5)^n + 3^n}{(-5)^n - 3^n} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{(-5)^n + 3^n}{(-5)^n - 3^n}$$



(1)

$\triangle ABC$ における余弦定理より,

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &= \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} \\ &= \frac{9}{16}\end{aligned}$$

である。これより内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \angle BAC \\ &= 4 \cdot 5 \cdot \frac{9}{16} \\ &= \frac{27}{2}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{27}{2}$$

(2)

$|\overrightarrow{AB}| = 4$, $|\overrightarrow{AC}| = 5$ であり, (1) から $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{27}{2}$ であるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} \cdot \{t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}\} \\ &= t|\overrightarrow{AB}|^2 + (1-t)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 16t + \frac{27}{2}(1-t) \\ &= \frac{5}{2}t + \frac{27}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AC} \cdot \{t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}\} \\ &= t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + (1-t)|\overrightarrow{AC}|^2 \\ &= \frac{27}{2}t + 25(1-t) \\ &= -\frac{45}{2}t + 25\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}t + \frac{27}{2}, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{45}{2}t + 25$$

(3)

線分 AD は $\angle BAC$ の二等分線より, $\cos \angle BAD = \cos \angle DAC$ である。

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos \angle BAD$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos \angle DAC$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} : \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} &= |\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{AC}| \\ &= 2 : 3\end{aligned}$$

である。(2) の $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}t + \frac{27}{2}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{45}{2}t + 25$ を上の式に代入すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{2}t + \frac{27}{2}\right) : \left(-\frac{45}{2}t + 25\right) &= 2 : 3 \\ \Leftrightarrow 2\left(-\frac{45}{2}t + 25\right) &= 3\left(\frac{5}{2}t + \frac{27}{2}\right) \\ \Leftrightarrow -45t + 50 &= \frac{15}{2}t + \frac{81}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{105}{2}t &= \frac{63}{2} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{3}{5}$$

(4)

(3) より点 D は $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ と定義されることから, 点 D は辺 BC を $\frac{2}{5} : \frac{3}{5} = 2 : 3$ に内分する点である。点 E は辺 AC の中点より $AE = CE = 3$ である。ここで $\triangle ACD$ と直線 BE におけるメネラウスの定理より

$$\begin{aligned}\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FD} \cdot \frac{DB}{BC} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{3} \cdot \frac{AF}{FD} \cdot \frac{BD}{BD+DC} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{AF}{FD} &= \frac{2+3}{2} \\ \Leftrightarrow AF : FD &= 5 : 2\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad AF : FD = 5 : 2$$

C_1 と C_2 の交点について、 $f(x)=g(x)$ は

$$\begin{aligned}x(a-x) &= x^2(a-x) \\ \Leftrightarrow x(x-1)(x-a) &= 0\end{aligned}$$

とできるから、交点の x 座標は $x=0, 1, a$ である。また C_1 と x 軸、 C_2 と x 軸で囲まれる図形の面積を S_1 、 S_2 とおく。

(1)

$$\begin{aligned}g(x) &= x^2(a-x) \text{ について,} \\ g'(x) &= 2ax-3x^2 \\ &= x(2a-3x)\end{aligned}$$

であるから $g'(x)=0$ となる x は $x=0, \frac{2}{3}a$ である。ここで a が正の定数であることより

$0<\frac{2}{3}a$ であるから $g(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	...	0	...	$\frac{2}{3}a$	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}a^3$	$\searrow$

これより $g(x)$ は $x=0$ で極小値 0、 $x=\frac{2}{3}a$ で極大値 $\frac{4}{27}a^3$ をとる。

(答) $x=0$ のとき極小値 0、 $x=\frac{2}{3}a$ のとき極大値 $\frac{4}{27}a^3$

(2)

求めるのは $S_1=3S_2$ となる a の値である。 S_1 について、 $f(x)=0\Leftrightarrow x=0, a$ より $0\leq x\leq a$ において $f(x)\geq 0$ であるから

$$\begin{aligned}S_1 &= -\int_0^a x(x-a)dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(a-0)^3 \\ &= \frac{1}{6}a^3\end{aligned}$$

である。同様に S_2 について、 $g(x)=0\Leftrightarrow x=0, a$ より $0\leq x\leq a$ において $g(x)\geq 0$ であるから

$$\begin{aligned}S_2 &= \int_0^a x^2(a-x)dx \\ &= \int_0^a (-x^3+ax^2)dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3\right]_0^a \\ &= \frac{1}{12}a^4\end{aligned}$$

である。この2式より $S_1=3S_2$ を解くと

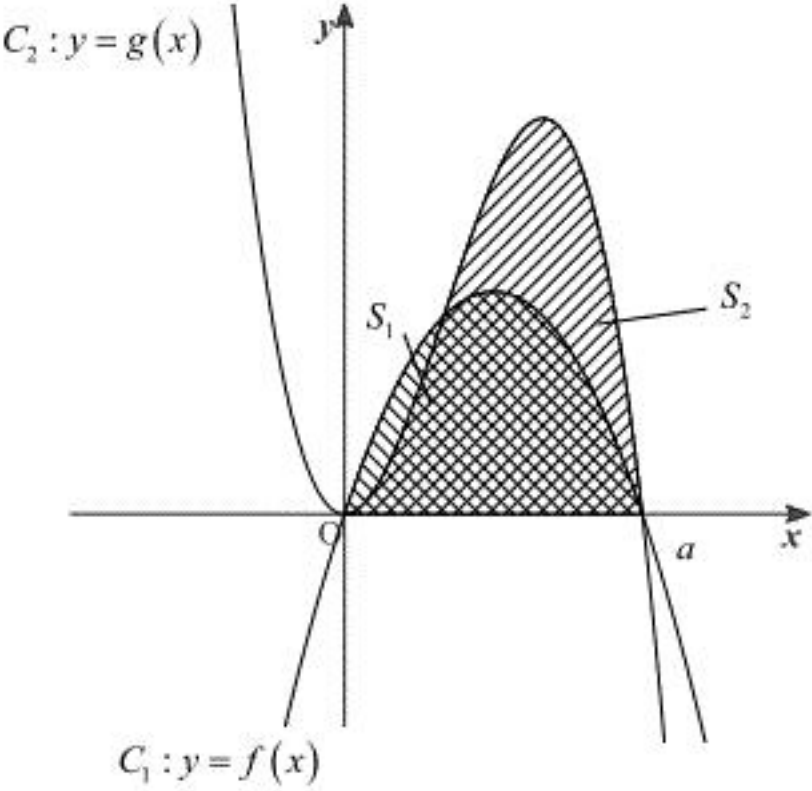
$$\begin{aligned}\frac{1}{6}a^3 &= 3\cdot\frac{1}{12}a^4 \\ \Leftrightarrow 3a^4-2a^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^3(3a-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 0, \frac{2}{3}\end{aligned}$$

である。ここで $0<a\leq 1$ であることより $S_1=3S_2$ を満たす a は $a=\frac{2}{3}$ である。

(答) $a=\frac{2}{3}$

(3)

$a>1$ のとき、3交点の x 座標は $0<1<a$ であるから C_1, C_2 は下図のようになる。



2曲線 C_1, C_2 で囲まれてできる2つの図形の面積が等しいとき、上図より $S_1=S_2$ が成立する。 S_1, S_2 は(2)で求めたものに等しいから、 $S_1=S_2$ を解くと

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}a^3 &= \frac{1}{12}a^4 \\ \Leftrightarrow a^4-2a^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^3(a-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 0, 2\end{aligned}$$

である。ここで $a>1$ であることより $S_1=S_2$ を満たす a は $a=2$ である。

(答) $a=2$

4—I

(1)

$y = x^2 + a$ について $y' = 2x$ より、直線 l は傾き $2t$ で点 $(t, t^2 + a)$ を通る直線であるから、直線

l の方程式は

$$y - (t^2 + a) = 2t(x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = 2tx - t^2 + a$$

である。これが原点 O を通ることから $(x, y) = (0, 0)$ を代入すると

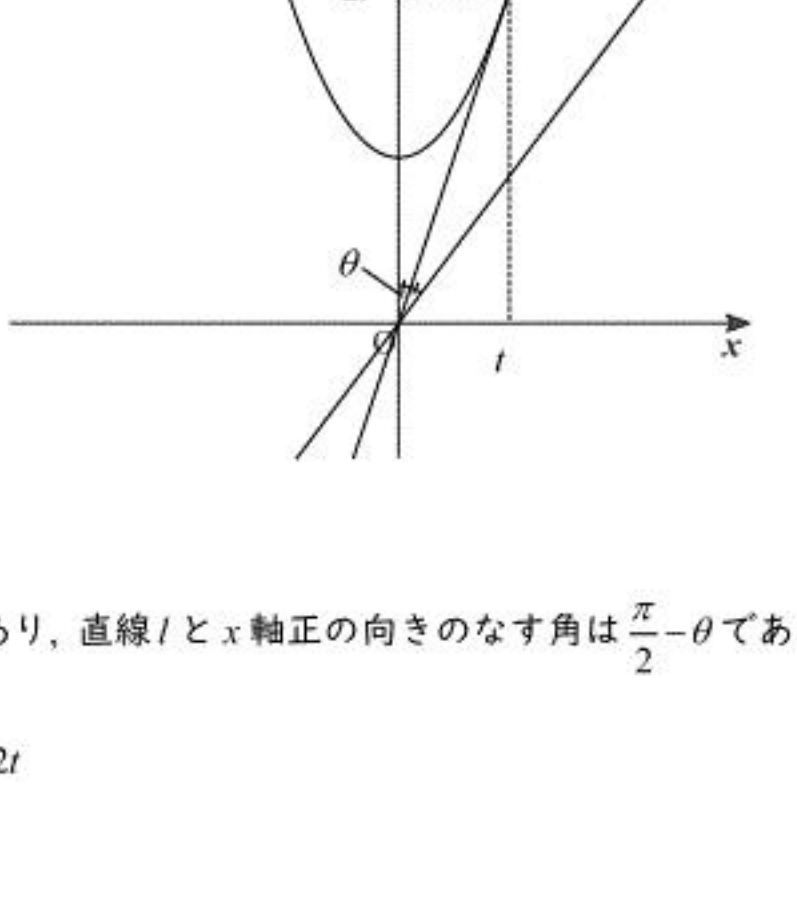
$$0 = 2t \cdot 0 - t^2 + a$$

$$\Leftrightarrow a = t^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = t^2$$

(2)



直線 l の傾きは $2t$ であり、直線 l と x 軸正の向きのなす角は $\frac{\pi}{2} - \theta$ であるから

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan \theta} = 2t$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta = \frac{1}{2t} \quad (\because t > 0)$$

である。これと 2 倍角の公式より

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2t}}{1 - \left(\frac{1}{2t}\right)^2}$$

$$= \frac{4t}{4t^2 - 1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \tan 2\theta = \frac{4t}{4t^2 - 1}$$

(3)

直線 m は直線 l に対して y 軸と対称な直線であるから、直線 m と x 軸正の向きのなす角は

$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \theta = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ である。これと直線 m が原点 O を通る直線であることから直線 m の方

程式は

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)x$$

$$= \frac{1}{\tan 2\theta}x$$

$$= \frac{4t^2 - 1}{4t}x$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{4t^2 - 1}{4t}x$$

(4)

放物線 C と直線 m が接するとき $x^2 + t^2 = \frac{4t^2 - 1}{4t}x$ が重解を持つ。つまり求める t の値は 2 次

方程式 $x^2 + t^2 = \frac{4t^2 - 1}{4t}x$ の判別式を D としたときの、 $D = 0$ となる t の値である。ここで、

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{4t^2 - 1}{4t}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot t^2 \\ &= \frac{16t^4 - 8t^2 + 1}{16t^2} - 4t^2 \\ &= -\frac{1}{16t^2}(48t^2 + 8t^2 - 1) \\ &= -\frac{1}{16t^2}(12t^2 - 1)(4t^2 + 1) \end{aligned}$$

であり $t^2 > 0$ であるから $D = 0$ となるのは $t^2 = \frac{1}{12}$ である。これと $t > 0$ より求める t の値は

$$t = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ である。}$$

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

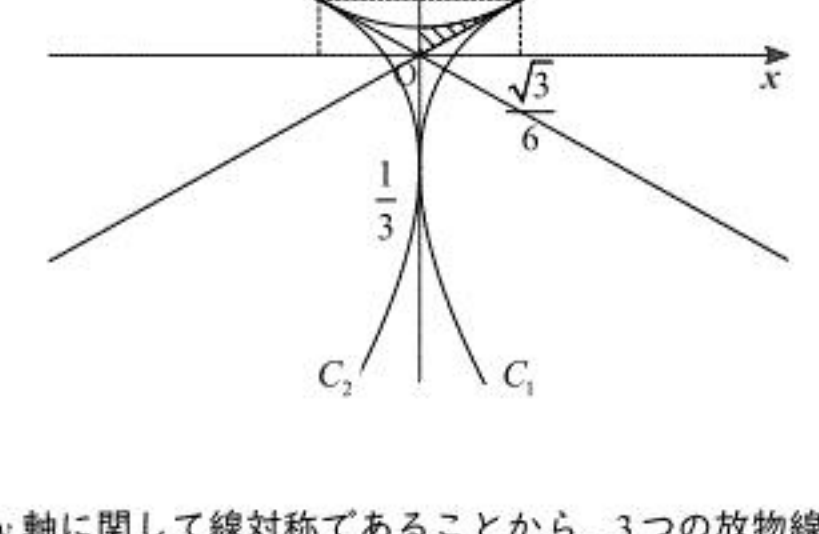
(5)

(4) のとき、放物線 $C: y = x^2 + \frac{1}{12}$ 、直線 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 、直線 $m: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ である。このとき

$\tan \theta = \sqrt{3}$ で $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので $\theta = \frac{\pi}{3}$ となる。これより 3 直線 y 軸、 l 、 m のなす角はいずれの

組も $\frac{1}{3}\pi$ である。よって放物線 C_1 、 C_2 は原点 O を中心に放物線 C をそれぞれ $-\frac{2}{3}\pi$ 、 $\frac{2}{3}\pi$ だけ

回転移動した放物線になる。



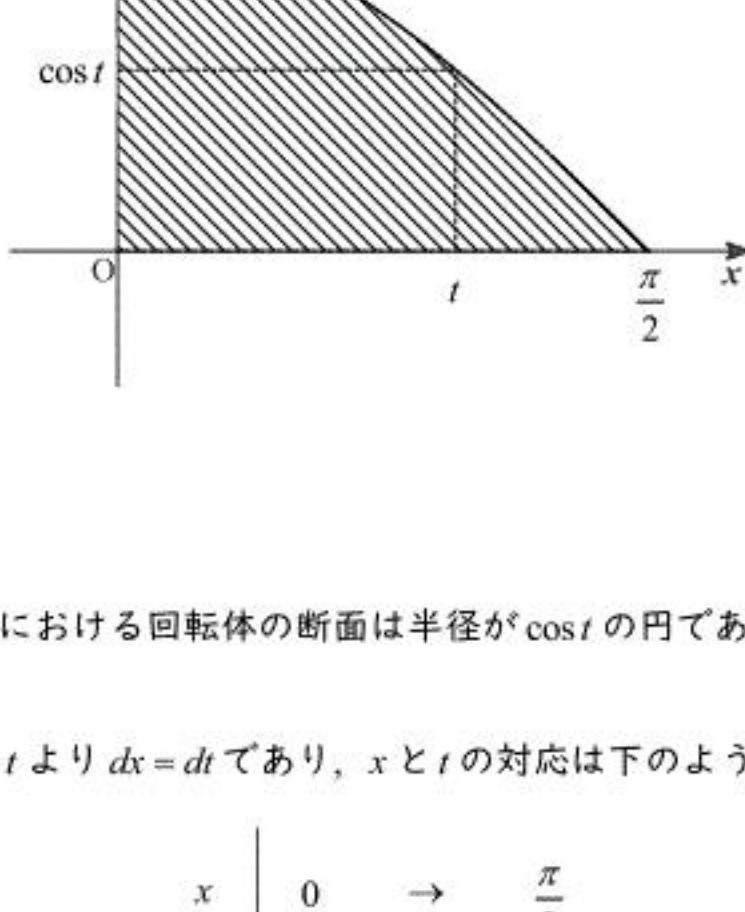
これと放物線 C が y 軸に関して線対称であることから、3 つの放物線 C 、 C_1 、 C_2 で囲まれる領域の面積は、 y 軸、直線 l 、放物線 C で囲まれる斜線部の領域の面積を 6 倍したものに等しい。よって求める面積は

$$\begin{aligned} 6 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{6}} \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{12}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}x \right\} dx &= 6 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{1}{12}x \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{6}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{36} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{3}}{36}$$

4—II



(1)

平面 $x = t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) における回転体の断面は半径が $\cos t$ の円であるから、その断面積は

$\pi(\cos t)^2$ である。 $x = t$ より $dx = dt$ であり、 x と t の対応は下ようになる。

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

これより回転体の体積 V_1 は

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 dt \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2t + t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad V_1 = \frac{\pi^2}{4}$$

(2)

$\cos x = \frac{d}{dx}(\sin x)$ であるから、積分定数を C とすると

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int x (\sin x)' dx \\ &= x \sin x - \int (x)' \sin x dx \\ &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

である。また $\sin x = \frac{d}{dx}(-\cos x)$ であるから、積分定数を C' とすると

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= \int x^2 (-\cos x)' dx \\ &= -x^2 \cos x - \int (x^2)' (-\cos x) dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + C) \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C' \end{aligned}$$

である。

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$(\text{答}) \quad \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C'$$

(C 、 C' は積分定数である)

(3)

平面 $y = \cos t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) における回転体の断面は半径が t の円であるから、その断面積は

πt^2 である。 $y = \cos t$ より $dy = -\sin t dt$ であり、 y と t の対応は下ようになる。

y	0	$\rightarrow$	1
t	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	0

これより回転体の体積 V_2 は

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^1 t^2 dy \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 t^2 (-\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t dt \\ &= \pi \left[-t^2 \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi(\pi - 2) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad V_2 = \pi(\pi - 2)$$