

数 学 (120 分)

(平成 23 年度 海洋科学部 前期日程)

注 意 事 項

問 題 冊 子	解 答 用 紙
1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。 2. この冊子は全部で 10 ページから成っている。表紙を開くと白紙があり、その裏が 1 ページ目である。不鮮明な印刷、ページの脱落に気付いたときは、試験監督者に申し出ること。 3. 問題冊子は持ち帰ること。	1. すべての解答用紙に受験番号、氏名を記入すること。記入を忘れたときは失格となることがある。 2. 解答用紙の枚数は、5 枚である。 3. 解答は、指定された箇所に記入すること。なお、解答は答えだけでなく途中の計算も記入すること。

1 3 次関数 $f(x)$ を $f(x) = x^3 - 4x$ で定める. このとき, 次の問に答えよ.
(配点:50 点)

- (1) 関数 $f(x)$ の極値を求め, $y = f(x)$ のグラフをかけ.
- (2) 点 $(1, 4)$ を通る直線と $y = |f(x)|$ のグラフが, $x > 0$ の範囲において 2 個の共有点をもつという. このような直線をすべて求めよ. ただし, 直線の傾きは負とする.

注意: 以下の余白, および右ページは計算用である. 解答は, 解答用紙に記入せよ.

- 2 関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ に対して次の等式が成り立っているとする.

$$f'(x) = x \int_{-2}^1 f(t) dt + \int_0^1 t f'(t) dt$$

このとき、次の問に答えよ. ただし, a, b, c は定数で $a > 0$ とする. (配点: 50 点)

- (1) b, c を a で表せ.
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の $x \geq -\frac{1}{2}$ の部分と x 軸および y 軸とで囲まれた図形の面積が 1 のとき, a の値を求めよ.

注意: 以下の余白, および右ページは計算用である. 解答は, 解答用紙に記入せよ.

3 三角形 OAB において、次を証明せよ。(配点：50 点)

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ とベクトル $\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}$ の長さが等しくなるような ± 1 以外の実数 t が存在することは $OA = OB$ であるための必要十分条件である。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ とベクトル $\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}$ が垂直になるような $t < -1$ である実数 t が存在することは $\angle AOB < 90^\circ$ であるための必要十分条件である。

注意：以下の余白、および右ページは計算用である。解答は、解答用紙に記入せよ。

- 4 表と裏が同じ確率 $\frac{1}{2}$ で出る 2 つの硬貨 A, B がある. xy 平面上の点 P がこの 2 つの硬貨 A, B を同時に投げた結果によって移動する. 点 P は, 硬貨 A を投げて表が出たら x 軸方向に $+1$ 移動し, 裏が出たら x 軸方向に -1 移動する. また, 硬貨 B を投げて表が出たら y 軸方向に $+1$ 移動し, 裏が出たら y 軸方向に -1 移動する. 点 P は最初に原点にあるものとし, このような操作をくり返すとき, 次の問に答えよ. (配点 : 50 点)
- (1) 点 P が 4 回目の操作で初めて原点にもどる確率を求めよ.
- (2) 点 P が 6 回目の操作で直線 $y = 4 - x$ の上にある確率を求めよ.

注意 : 以下の余白, および右ページは計算用である. 解答は, 解答用紙に記入せよ.

5 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(p + \frac{k}{n} \right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める。ただし p は実数とする。このとき、次の問に答えよ。(配点：50 点)

- (1) すべての実数 p に対して、 $a_n \geq \frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ ($n = 1, 2, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (2) $p = \frac{5}{3}$ のとき、 $a_n < 5$ となる最小の n の値を求めよ。

注意：以下の余白、および右ページは計算用である。解答は、解答用紙に記入せよ。

