平成 23 年度

東京海洋大学 海洋工学部

個別学力検査 **数学** 試験問題

1 （配点 25 点）

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$，$p_n = \dfrac{a_n}{c_n}$ $\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく．

(1) 数学的帰納法を用いて，$a_n = d_n$ および $b_n = c_n$ が成り立つことを示せ．

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(3) $q_n = \dfrac{1}{p_n - 1}$ とおくとき，q_{n+1} を q_n を用いて表せ．

(4) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

2 （配点 25 点）

AB $= 4$，BC $= 5$，CA $= 6$ であるような △ABC において，∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D，辺 CA の中点を E，線分 AD と線分 BE の交点を F とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$ とおくとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を t を用いて表せ．

(3) t の値を求めよ．

(4) AF : FD を求めよ．

$\boxed{3}$ （配点 25 点）

a を正の定数とする．関数 $f(x) = x(a-x)$，$g(x) = x^2(a-x)$ に対し，2 つの曲線

$C_1 \colon y = f(x)$，$C_2 \colon y = g(x)$ を考える．以下の問いに答えよ．

ただし，$\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$ （C は積分定数) を用いてよい．

(1) $g(x)$ の極値を a を用いて表せ．

(2) $0 < a \leqq 1$ とする．C_1 と x 軸で囲まれた図形の面積が，C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積の 3 倍になるとき，a の値を求めよ．

(3) $a > 1$ とする．2 曲線 C_1，C_2 で囲まれてできる 2 つの図形の面積が等しくなるとき，a の値を求めよ．

$\boxed{\text{4-I}}$, $\boxed{\text{4-II}}$ **どちらかを選択**

$\boxed{\textbf{4-I}}$ （配点 25 点）

a を定数とする．放物線 $C \colon y = x^2 + a$ 上の点 (t, t^2+a)（$t > 0$）における接線 l が原点を通るとする．直線 l に関して y 軸と対称な直線を m とする．

(1) a を t を用いて表せ．

(2) y 軸と直線 l のなす角を θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とするとき，$\tan 2\theta$ を t を用いて表せ．

(3) 直線 m の方程式を t を用いて表せ．

(4) 放物線 C と直線 m が接するとき，t の値を求めよ．

(5) (4) のとき，放物線 C を直線 l に関して対称移動した曲線を C_1, 直線 m に関して対称移動した曲線を C_2 とする．C, C_1, C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{\textbf{4-II}}$ （配点 25 点）

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $y = \cos x$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を D とする．

(1) D を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ と $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$ を求めよ．

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V_2 を求めよ．