

(1)

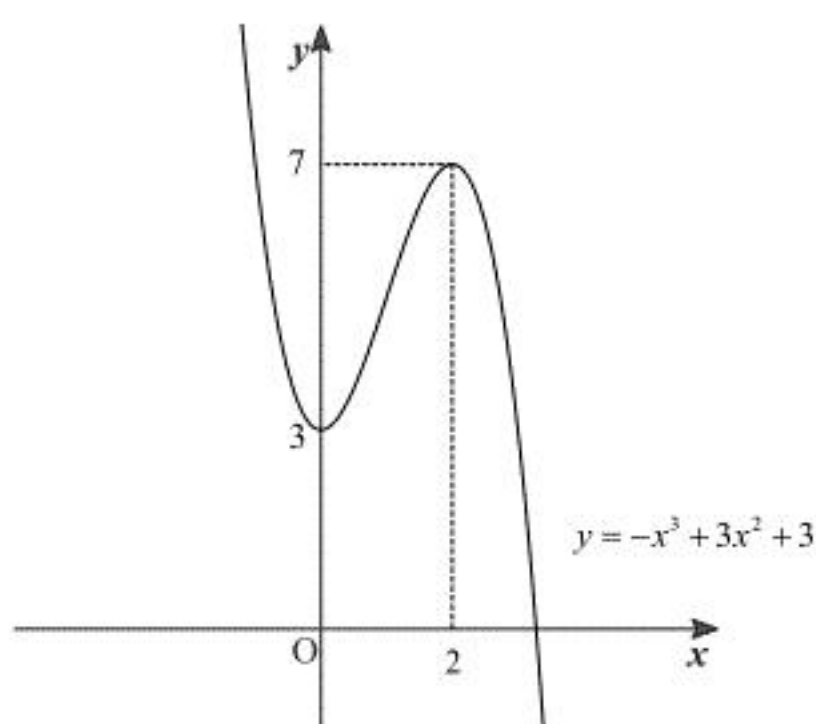
$a=1, b=3$ を代入すると $f(x)=-x^3+3x^2+3$ であるから、これを x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 6x \\ &= -3x(x-2) \end{aligned}$$

を得る。このとき $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0, 2$ であり、 $x<0, 2<x$ のとき $f'(x)<0$ 、 $0<x<2$ のとき $f'(x)>0$ とわかるので、増減表は下のよう書ける。

x		0		2	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$	7	$\searrow$

極大値は $f(2)=7$ 、極小値は $f(0)=3$ と計算される。また、上の増減表より $y=f(x)$ を座標平面上に図示すると下図のようになる。



(答) 極大値：7 ($x=2$)，極小値：3 ($x=0$)， $y=f(x)$ のグラフ：上図

(2)

$f(x)=-x^3+3ax^2+b$ より、 $f'(x)$ は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 6ax \\ &= -3x(x-2a) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。以下のように場合分けし、 $0 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最大値を求める。

[1] $2a < 0$ つまり $a < 0$ のとき

①式より、 $0 \leq x \leq 2$ において $f'(x)$ は常に 0 以下であるから、 $f(x)$ は単調減少であり、 $x=0$ で最大値 $f(0)=b$ をとる。

[2] $0 \leq 2a < 2$ つまり $0 \leq a < 1$ のとき

このとき $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$2a$	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$4a^3+b$	$\searrow$	

これより $f(x)$ の最大値は $f(2a)=4a^3+b$ である。

[3] $2 \leq 2a$ つまり $1 \leq a$ のとき

①式より、 $0 \leq x \leq 2$ において $f'(x)$ は常に 0 以上であるから、 $f(x)$ は単調増加であり、 $x=2$ で最大値 $f(2)=12a+b-8$ をとる。

以上[1], [2], [3]より、 $0 \leq x \leq 2$ において $f(x) \leq 4$ となるための a, b の条件は、

$$a < 0 \text{ のとき } b \leq 4$$

$$0 \leq a < 1 \text{ のとき } 4a^3 + b \leq 4 \text{ つまり } b \leq -4a^3 + 4$$

$$1 \leq a \text{ のとき } 12a + b - 8 \leq 4 \text{ つまり } b \leq -12a + 12$$

となる。

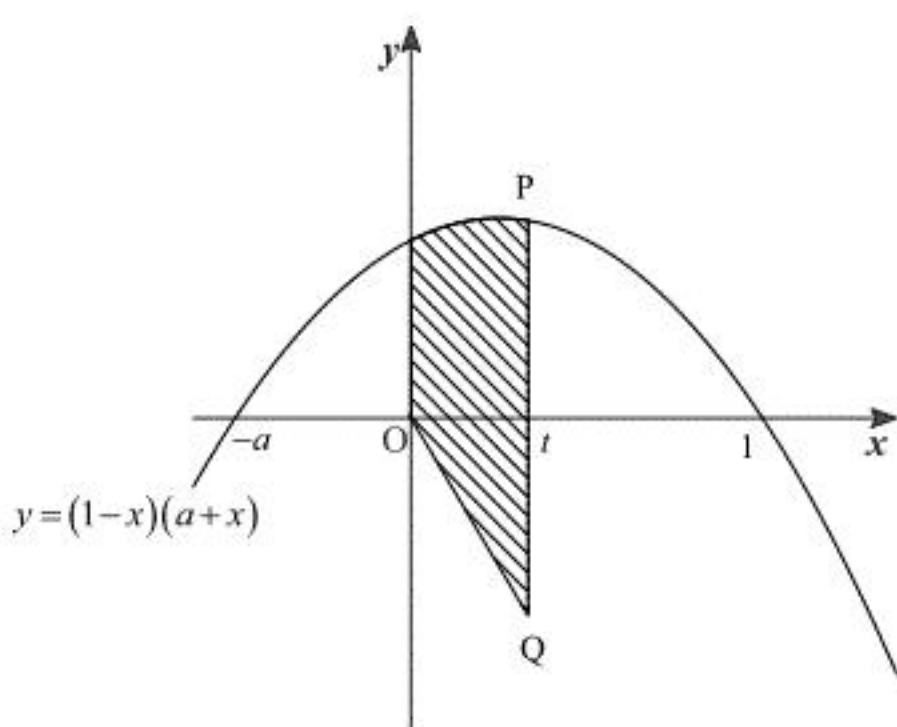
$$a < 0 \text{ のとき } b \leq 4$$

$$(答) \quad 0 \leq a < 1 \text{ のとき } b \leq -4a^3 + 4$$

$$1 \leq a \text{ のとき } b \leq -12a + 12$$

(1)

点Qは、 x 軸に関して点Pに対称だから、 $Q(t, -(1-t)(a+t))$ である。 $a > 0$, $0 < t < 1$ における $y = (1-x)(a+x)$ のグラフを座標平面に図示すると以下のようなになる。



斜線部の面積が求める面積 S である。図より S は、 $\int_0^t (1-x)(a+x) dx$ と、斜辺を OQ にもつ

直角三角形の面積の和で求められる。直角三角形の面積は $\frac{1}{2}t(1-t)(a+t)$ と計算されるから、面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}t(1-t)(a+t) + \int_0^t (1-x)(a+x) dx \\ &= \frac{1}{2}t(1-t)(a+t) + \int_0^t \{-x^2 + (1-a)x + a\} dx \\ &= \frac{1}{2}t(1-t)(a+t) + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 + ax \right]_0^t \\ &= -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1-a}{2}t^2 + \frac{1}{2}at - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1-a}{2}t^2 + at \\ &= -\frac{5}{6}t^3 + (1-a)t^2 + \frac{3}{2}at \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = -\frac{5}{6}t^3 + (1-a)t^2 + \frac{3}{2}at$$

(2)

S を $S(t)$ と置き換える。これを微分すると、

$$S'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 2(1-a)t + \frac{3}{2}a$$

となる。ここで、

$$S'(-a) = -\frac{5}{2}a^2 + 2a(a-1) + \frac{3}{2}a = -\frac{1}{2}a(a+1) < 0 \quad (\because a > 0)$$

$$S'(0) = \frac{3}{2}a > 0 \quad (\because a > 0)$$

$$S'\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{9}{16} - (a-1)\frac{3}{2} + \frac{3}{2}a = \frac{3}{32} > 0$$

$$S'\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4^2}{5} - 2(a-1) \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{2}a = -\frac{a}{10} < 0 \quad (\because a > 0)$$

と計算され、それぞれ0との大小関係がわかる。ここで関数 $S'(t)$ は $-a \leq t \leq 0$ と $\frac{3}{4} \leq t \leq \frac{4}{5}$

において連続であるから、中間値の定理より、方程式 $S'(t) = 0$ は $-a < t < 0$ と $\frac{3}{4} < t < \frac{4}{5}$ にそれぞれ少なくとも1つずつ実数解をもつ。一方で $S'(t) = 0$ は t の2次方程式であり、異なる実数解を多くとも2つまでもつから、方程式 $S'(t) = 0$ は $-a < t < \frac{3}{4}$ と $\frac{3}{4} < t < \frac{4}{5}$ に1つずつ解をもつことが示される。これらの2解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、関数 $S(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0		β		1
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$					

したがって $S(t)$ は $t = \beta$ ($\frac{3}{4} < \beta < \frac{4}{5}$) で最大となる。よって S を最大にする t が $\frac{3}{4} < t < \frac{4}{5}$ の範囲に存在することが示された。

(証明終)

(1)

AB=1, BC=1, AE=2より, 三平方の定理から,

$$\begin{aligned}AH^2 &= AE^2 + EH^2 \\&= 2^2 + 1^2 \quad (\because EH = BC = 1) \\&= 5 \\AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\&= 1^2 + 1^2 \\&= 2 \\HC^2 &= CD^2 + DH^2 \\&= 1^2 + 2^2 \quad (\because CD = AB = 1, DH = AE = 2) \\&= 5\end{aligned}$$

と計算され, $AH = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{2}$, $HC = \sqrt{5}$ となる。△ACHは二等辺三角形であるから, ACの中点をMとして,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot HM \\&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{HC^2 - CM^2} \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{5 - \frac{1}{2}} \\&= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

と計算される。

(答) $\frac{3}{2}$

(2)

$AG = \sqrt{AH^2 + HG^2} = \sqrt{5+1} = \sqrt{6}$ である。また, 三角形の辺の長さの組み合わせは,

$\{1, 1, \sqrt{2}\}$, $\{1, 2, \sqrt{5}\}$, $\{1, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$, $\{\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}\}$, $\{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}\}$ の5つが存在する。このうち,

$S=1$ となるのは, 三角形の辺の長さの組み合わせが $\{1, 2, \sqrt{5}\}$, $1, 2, \sqrt{5}$ となるときである。長さ

1の辺は8本あり, それぞれに対してこれらの長さを満たす三角形が2つずつあるから, $S=1$ となる選び方は $8 \cdot 2 = 16$ 通りである。8つの頂点から相異なる3点を選ぶときの選び方の総数は ${}_8C_3 = 56$ 通りだから, 求める確率は,

$$\frac{16}{{}_8C_3} = \frac{16}{56} = \frac{2}{7}$$

である。

(答) $\frac{2}{7}$

(3)

三角形の辺の長さの組み合わせは5つ存在するので, それぞれの組み合わせにおける面積と三角形の選び方の総数を求める。

[1] 辺の長さの組み合わせが $\{1, 1, \sqrt{2}\}$ の三角形

$\sqrt{2}$ の長さの辺を斜辺とする直角二等辺三角形であり, $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$ と計算される。長さ

$\sqrt{2}$ の辺は, 長さ1の正方形の対角線であり合計4本存在する。その各辺について条件をみたす三角形が2通りずつ存在するので, この三角形の選び方は $4 \cdot 2 = 8$ 通りである。

[2] 辺の長さの組み合わせが $\{1, 2, \sqrt{5}\}$ の三角形

(2)より, $S=1$ であり, この三角形の選び方は16通りである。

[3] 辺の長さの組み合わせが $\{1, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$ の三角形

$\sqrt{6}$ の長さの辺を斜辺とする直角三角形であり, $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ と計算される。長さ1

の辺は8本あり, それぞれに対してこれらの長さを満たす三角形が2つずつあるから, この三角形の選び方は $8 \cdot 2 = 16$ 通りである。

[4] 辺の長さの組み合わせが $\{\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}\}$ の三角形

$\sqrt{6}$ の長さの辺を斜辺とする直角三角形であり, $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = \sqrt{2}$ と計算される。[1]と同

様にしてこの三角形の選び方は $4 \cdot 2 = 8$ 通りである。

[5] 辺の長さの組み合わせが $\{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}\}$ の三角形

(1)より, $S = \frac{3}{2}$ である。[1]と同様にしてこの三角形の選び方は $4 \cdot 2 = 8$ 通りである。

以上[1], [2], [3], [4], [5]より, 求める期待値は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{56} + 1 \cdot \frac{16}{56} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{16}{56} + \sqrt{2} \cdot \frac{8}{56} + \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{56} &= \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2} + 2 + \sqrt{5} + \sqrt{2} + \frac{3}{2} \right) \\&= \frac{1}{7} (4 + \sqrt{2} + \sqrt{5})\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{7} (4 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$

(1)

$f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{2}x$ を微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 7x + \frac{7}{2} \\ &= 3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{7}{12} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\frac{4}{5} \leq x \leq \frac{4}{3}$ における $f'(x)$ の最大値を考える。 $\frac{7}{6} - \frac{4}{5} = \frac{11}{30}$, $\frac{4}{3} - \frac{7}{6} = \frac{1}{6} = \frac{5}{30}$

であるから,

$$\left| \frac{7}{6} - \frac{4}{5} \right| > \left| \frac{4}{3} - \frac{7}{6} \right|$$

が成り立つ。 $f'(x)$ が下に凸の2次関数であり、軸対称であることから $\frac{4}{5} \leq x \leq \frac{4}{3}$ において

$f'(x)$ は $x = \frac{4}{5}$ で最大値をとる。したがって,

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{4}{5}\right) &= 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 7 \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{2} \\ &= -\frac{92}{25} + \frac{7}{2} \\ &= -\frac{9}{50} \\ &< 0 \end{aligned}$$

より、 $f'(x) < 0$ であるから、 $f(x)$ は $\frac{4}{5} \leq x \leq \frac{4}{3}$ で減少する。

(証明終)

(2)

数学的帰納法を利用して,

$$\frac{4}{5} \leq a_n \leq \frac{4}{3} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \cdots \textcircled{1}$$

であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1 = \frac{4}{3} \text{ より条件を満たす。}$$

[2] $n=k$ のとき

$\frac{4}{5} \leq a_k \leq \frac{4}{3}$ が成り立つと仮定する。(1)より関数 $f(x)$ は $\frac{4}{5} \leq x \leq \frac{4}{3}$ で単調減少するので,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4}{5}\right) &\geq f(a_k) \geq f\left(\frac{4}{3}\right) \\ \Leftrightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) &\leq a_{k+1} \leq f\left(\frac{4}{5}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $f\left(\frac{4}{3}\right)$, $f\left(\frac{4}{5}\right)$ をそれぞれ計算すると,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4}{3}\right) &= \left(\frac{4}{3}\right)^3 - \frac{7}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{7}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{22}{27} \\ f\left(\frac{4}{5}\right) &= \left(\frac{4}{5}\right)^3 - \frac{7}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{7}{2}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{134}{125} \end{aligned}$$

である。 $\frac{22}{27} - \frac{4}{5} = \frac{2}{135} > 0$, $\frac{4}{3} - \frac{134}{125} = \frac{98}{375} > 0$ より

$$\frac{4}{5} < f\left(\frac{4}{3}\right) \leq a_{k+1} \leq f\left(\frac{4}{5}\right) < \frac{4}{3}$$

が成り立つから、 $\frac{4}{5} \leq a_{k+1} \leq \frac{4}{3}$ が成り立つ。したがって $n=k$ のとき①が成り立つと仮定

すると $n=k+1$ のときも①が成り立つ。

以上[1], [2]より、数学的帰納法を用いて①が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

$n \geq 2$ において $|a_n - 1|$ を計算すると,

$$\begin{aligned} |a_n - 1| &= \left| a_{n-1}^3 - \frac{7}{2}a_{n-1}^2 + \frac{7}{2}a_{n-1} - 1 \right| \\ &= \left| a_{n-1}^2 - \frac{5}{2}a_{n-1} + 1 \right| \cdot |a_{n-1} - 1| \\ \therefore |a_n - 1| &= \left| -\left(a_{n-1} - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{16} \right| \cdot |a_{n-1} - 1| \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。ここで $g(x) = -\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{16}$ とおき、 $\frac{4}{5} \leq x \leq \frac{4}{3}$ における $g(x)$ の値域を考える。

$\frac{4}{5} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3}$ であり、 $g(x)$ は $x = \frac{5}{4}$ を軸とする、上に凸の2次関数であるから、 $g(x)$ は最大値

$g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{16}$ をとる。また、 $\frac{5}{4} - \frac{4}{5} = \frac{9}{20} = \frac{27}{60}$, $\frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{12} = \frac{5}{60}$ であるから,

$$\left| \frac{5}{4} - \frac{4}{5} \right| > \left| \frac{4}{3} - \frac{5}{4} \right|$$

が成り立つ。したがって、 $g(x)$ は上に凸の2次関数であり、軸 $x = \frac{5}{4}$ に関して対称だから、

$x = \frac{4}{5}$ において最小値

$$\begin{aligned} g\left(\frac{4}{5}\right) &= -\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{16} \\ &= -\left(-\frac{9}{20}\right)^2 + \frac{9}{16} \\ &= \frac{9}{16} \left(1 - \frac{9}{25}\right) \\ &= \frac{9}{16} \cdot \frac{16}{25} \\ &= \frac{9}{25} \end{aligned}$$

をとる。以上より $\frac{9}{25} \leq g(x) \leq \frac{9}{16}$ が成り立つ。したがって、(2)より $\frac{4}{5} \leq a_{n-1} \leq \frac{4}{3}$ であるか

ら、 $n \geq 2$ において②を用いて,

$$\frac{9}{25} \leq g(a_{n-1}) \leq \frac{9}{16}$$

より,

$$\frac{9}{25} \leq |g(a_{n-1})| \leq \frac{9}{16}$$

が成り立つ。これより,

$$\begin{aligned} \frac{9}{25} &\leq \left| -\left(a_{n-1} - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{16} \right| \leq \frac{9}{16} \\ \Leftrightarrow \frac{9}{25}|a_{n-1} - 1| &\leq \left| -\left(a_{n-1} - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{16} \right| \cdot |a_{n-1} - 1| \leq \frac{9}{16}|a_{n-1} - 1| \\ \therefore \frac{9}{25}|a_{n-1} - 1| &\leq |a_n - 1| \leq \frac{9}{16}|a_{n-1} - 1| \end{aligned}$$

となる。この不等式を繰り返し用いることで,

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} |a_1 - 1| &\leq |a_n - 1| \leq \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1} |a_1 - 1| \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} &\leq |a_n - 1| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

が得られる。これは $n=1$ のときも含めることができるから,

$$\frac{1}{3} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \leq |a_n - 1| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(1)

点Pは原点中心で半径1の球面上にあるから $|\overrightarrow{OP}|=1$ が成り立つ。また、 $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$

と表される。また、 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OG}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると、

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OG} = |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OG}| \cos \theta = |\overrightarrow{OG}| \cos \theta$ と表される。これらを用いて、

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}|^2 \\ &= 3|\overrightarrow{OP}|^2 - 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OP} + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= -6\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OG} + 3 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= -6|\overrightarrow{OG}| \cos \theta + 3 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 \end{aligned}$$

と変形される。 $|\overrightarrow{OA}|, |\overrightarrow{OB}|, |\overrightarrow{OC}|, |\overrightarrow{OG}|$ は正の定数であるから、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ が最大となる

とき $\theta = \pi$ であり、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ が最小となるとき $\theta = 0$ であるとわかる。 $\theta = \pi$ のとき、点Pは点Qと一致し、 $\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OG}$ のなす角が π であるから、3点O, Q, Gが一直線上にあることがわかる。 $\theta = 0$ のとき、点Pは点Rと一致し、 $\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OG}$ のなす角が0であるから、3点O, R, Gが一直線上にあることがわかる。したがって、4点O, Q, R, Gは一直線上にあり、3点Q, R, Gが一直線上にあることが示された。

(証明終)

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} M &= 6|\overrightarrow{OG}| + 3 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 \\ m &= -6|\overrightarrow{OG}| + 3 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 \end{aligned}$$

と計算できる。また、

$$\begin{aligned} GA^2 + GB^2 + GC^2 &= |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}|^2 + |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}|^2 + |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG}|^2 \\ &= 3|\overrightarrow{OG}|^2 - 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OG} + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= 3|\overrightarrow{OG}|^2 - 6|\overrightarrow{OG}| + 3 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= -3|\overrightarrow{OG}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 \end{aligned}$$

と計算されるから、与式は、

$$\begin{aligned} &\sqrt{M - (GA^2 + GB^2 + GC^2)} - \sqrt{m - (GA^2 + GB^2 + GC^2)} \\ &= \sqrt{(6|\overrightarrow{OG}| + 3 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2) - (-3|\overrightarrow{OG}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2)} \\ &\quad - \sqrt{(-6|\overrightarrow{OG}| + 3 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2) - (-3|\overrightarrow{OG}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2)} \\ &= \sqrt{3|\overrightarrow{OG}|^2 + 6|\overrightarrow{OG}| + 3} - \sqrt{3|\overrightarrow{OG}|^2 - 6|\overrightarrow{OG}| + 3} \\ &= \sqrt{3} \sqrt{(|\overrightarrow{OG}| + 1)^2} - \sqrt{3} \sqrt{(|\overrightarrow{OG}| - 1)^2} \\ &= \sqrt{3} ||\overrightarrow{OG}| + 1| - \sqrt{3} ||\overrightarrow{OG}| - 1| \\ &= \sqrt{3} (|\overrightarrow{OG}| + 1) - \sqrt{3} (|\overrightarrow{OG}| - 1) \quad (\because |\overrightarrow{OG}| > 1) \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

と計算される。したがって与式の値は三角形ABCに無関係に定まることが示された。その値は $2\sqrt{3}$ である。

(答) $2\sqrt{3}$