

(1)

点 (x, y) を行列 A で移した点が (x', y') であるから,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であり, また条件から $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$ が常に成り立つので

$$\begin{aligned}(ax+by)^2 + (cx+dy)^2 &= x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow (a^2+c^2-1)x^2 + (b^2+d^2-1)y^2 + (2ab+2cd)xy &= 0\end{aligned}$$

が任意の x, y について成り立つ。この式に $(x, y) = (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ をそれぞれ代入すると,

$$a^2 + c^2 - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b^2 + d^2 - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(a^2 + c^2 - 1) + (b^2 + d^2 - 1) + (2ab + 2cd) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab + cd = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つことがわかる。ここで $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を計算すると, ①, ②, ③を用いて

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と計算できるので, 命題は成り立つ。

(証明終)

(2)

(1)より

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \Leftrightarrow (ad-bc)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow ad-bc &= \pm 1\end{aligned}$$

が成り立つので, $|A| = ad - bc \neq 0$ から A は正則である。ここで原点に関する対称移動になる

行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であるので,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。(1)よりこの式は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と書け, A は正則より逆行列が存在し, 右から A の逆行列をかけると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 A^{-1} &= -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A^{-1} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (AA^{-1} = E)\end{aligned}$$

が成り立つ。各成分を比較すると $a = d = 0, c = -b$ がわかり, ①, ③に代入すると

$$\begin{aligned}\begin{cases} 0^2 + c^2 = 1 \\ 0^2 + b^2 = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (b, c) &= (1, -1), (-1, 1)\end{aligned}$$

より $(a, b, c, d) = (0, 1, -1, 0), (0, -1, 1, 0)$ を得る。逆にこの時

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より条件を満たすので, 確かに題意を満たす。したがて, 求める行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

である。

$$\text{(答)} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= 2x \cdot x - 1 \\
&= 2x^2 - 1 \\
f_3(x) &= 2x(2x^2 - 1) - x \\
&= 4x^3 - 3x \\
f_4(x) &= 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) \\
&= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
f_5(x) &= 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) \\
&= 16x^5 - 20x^3 + 5x
\end{aligned}$$

より, $f_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ とわかる。よって $f_5(x) = 0$ の解は

$$\begin{aligned}
16x^5 - 20x^3 + 5x &= 0 \\
x(16x^4 - 20x^2 + 5) &= 0 \\
x = 0, x^2 &= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8} \\
x = 0, \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}, &-\frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}
\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad x = 0, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

(2)

$\cos n\theta$ ($n = 2, 3, 4, 5$) をそれぞれ式変形すると, 以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= 2\cos^2 \theta - 1 \\
&= f_2(\cos \theta) \\
\cos 3\theta &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \\
&= f_3(\cos \theta) \\
\cos 4\theta &= 2\cos^2 2\theta - 1 \\
&= 2(2\cos^2 \theta - 1)^2 - 1 \\
&= 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1 \\
&= f_4(\cos \theta) \\
\cos 5\theta &= \cos(2\theta + 3\theta) \\
&= \cos 2\theta \cos 3\theta - \sin 2\theta \sin 3\theta \\
&= (2\cos^2 \theta - 1)(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) - 2\sin \theta \cos \theta(-4\sin^3 \theta + 3\sin \theta) \\
&= 8\cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta + 3\cos \theta + 8(1 - \cos^2 \theta)^2 \cos \theta - 6(1 - \cos^2 \theta)\cos \theta \\
&= 16\cos^5 \theta - 20\cos^3 \theta + 5\cos \theta \\
&= f_5(\cos \theta)
\end{aligned}$$

以上より, $f_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ ($n = 2, 3, 4, 5$) が成り立つ。

(証明終)

(3)

$\theta = \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}$ のとき $\cos \theta \neq 0$ であり, それぞれ $5\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}$ であるから

$\cos 5\theta = 0$ が成り立つ。したがって, $f(\cos \theta) = \cos 5\theta = 0$ より(1)から

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \quad (\because \cos \theta \neq 0)$$

が成り立つ。また, $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{3\pi}{10} < \frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{10} < \frac{9\pi}{10} < \pi$ であることと, $\cos \theta$ は $0 < \theta < \pi$ で単調減少であることから, 不等式

$$\cos \frac{\pi}{10} > \cos \frac{3\pi}{10} > 0 > \cos \frac{7\pi}{10} > \cos \frac{9\pi}{10}$$

が成り立つ。以上より, $\cos \frac{\pi}{10}, \cos \frac{3\pi}{10}, \cos \frac{7\pi}{10}, \cos \frac{9\pi}{10}$ は,

$$\cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \cos \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \cos \frac{7\pi}{10} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \cos \frac{9\pi}{10} = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \cos \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \cos \frac{7\pi}{10} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \cos \frac{9\pi}{10} = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

3

(1)

$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a$ より、この式を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a \\ &= (x^3 - 2x^2 + x) - a(x^2 - 2x + 1) \\ &= (x-a)(x-1)^2 \end{aligned}$$

となる。 $a \neq 1$ もあわせると、方程式 $f(x)=0$ の解は

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, a \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $x=1, a$

(2)

(1)より $f(x)=(x-a)(x-1)^2$ であるので、 $f'(x)$ は

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot (x-1)^2 + 2(x-1)(x-a) \\ &= (x-1)\{3x-(2a+1)\} \end{aligned}$$

と計算できるから、 $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1, \frac{2a+1}{3}$ が成り立つ。ここで $a \neq 1$ より 1 と $\frac{2a+1}{3}$ は異なる値であるから、それぞれ極値を持つ。以下、 $a > 1$ の場合と $a < 1$ の場合に分けて考える。

[1] $a > 1$ の場合

$f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	...	1	...	$\frac{2a+1}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

したがって、 $f(x)$ の極値は

$$\text{極大値} \cdots f(1) = 0$$

$$\text{極小値} \cdots f\left(\frac{2a+1}{3}\right) = -\frac{4}{27}(a-1)^3$$

と求められる。

[2] $a < 1$ の場合

$f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	...	$\frac{2a+1}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

したがって、 $f(x)$ の極値は

$$\text{極大値} \cdots f\left(\frac{2a+1}{3}\right) = -\frac{4}{27}(a-1)^3$$

$$\text{極小値} \cdots f(1) = 0$$

と求められる。

以上より、 $f(x)$ の極値は $0, -\frac{4}{27}(a-1)^3$ である。

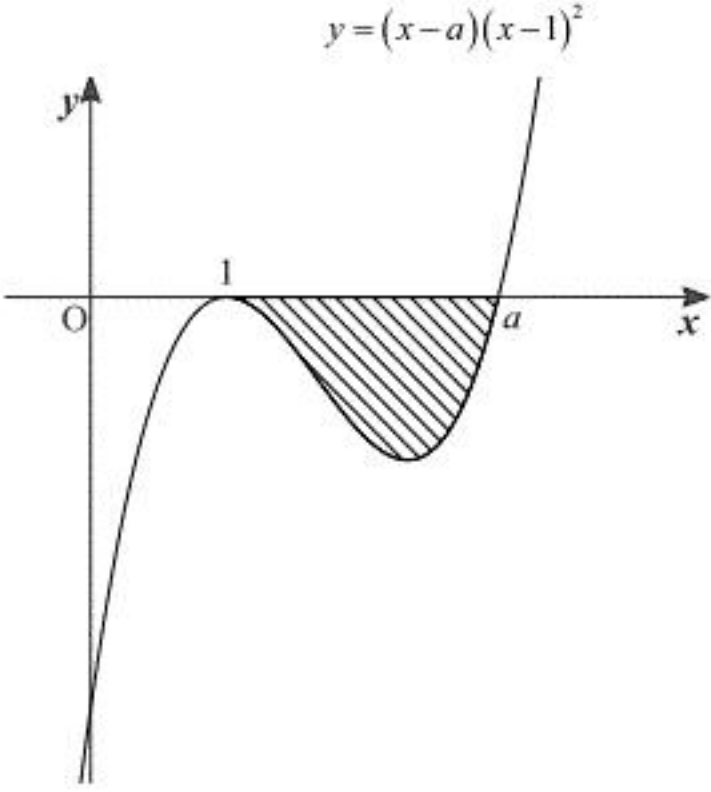
(答) $0, -\frac{4}{27}(a-1)^3$

(3)

(2)と同様に、 $a > 1$ の場合と $a < 1$ の場合に分けて考える。

[1] $a > 1$ の場合

$y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



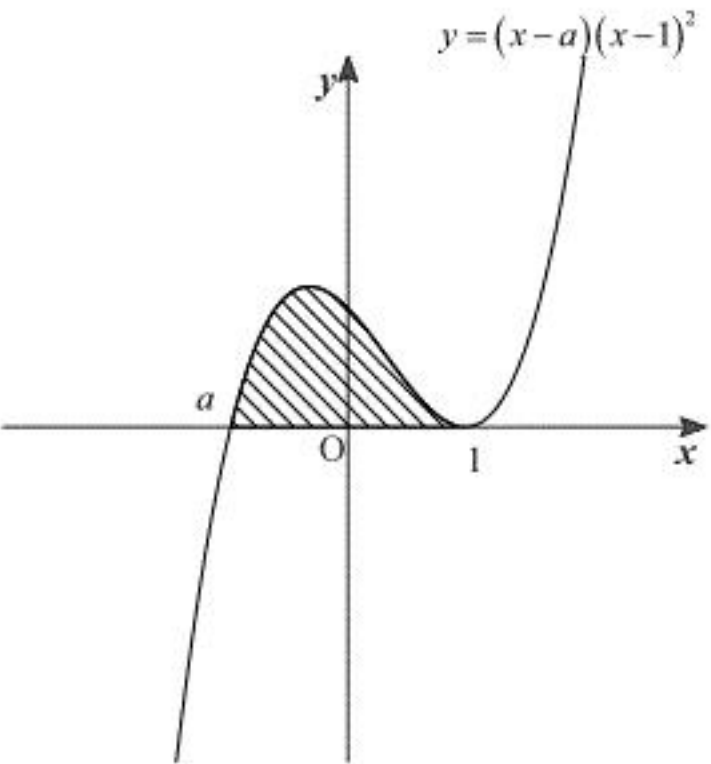
上図より、求める面積を S とすると $S = \int_1^a \{-(x-a)(x-1)^2\} dx$ より、これを計算して

$$\begin{aligned} S &= \int_1^a \{-(x-a)(x-1)^2\} dx \\ &= -\int_1^a (x-1+1-a)(x-1)^2 dx \\ &= -\int_1^a \{(x-1)^3 + (1-a)(x-1)^2\} dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1-a}{3}(x-1)^3 \right]_1^a \\ &= -\left\{ \frac{1}{4}(a-1)^4 + \frac{1-a}{3}(a-1)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{12}(a-1)^4 \end{aligned}$$

を得る。

[2] $a < 1$ の場合

$y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



図より求める面積を T とすると $T = \int_a^1 (x-a)(x-1)^2 dx$ と表せるが、これを変形すると

$$T = \int_1^a \{-(x-a)(x-1)^2\} dx \text{ であるので、[1]から } T = \frac{1}{12}(a-1)^4 \text{ を得る。}$$

以上[1],[2]より、曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{1}{12}(a-1)^4$ とわかる。

(答) $\frac{1}{12}(a-1)^4$

4 - I

(1)

$y' = 2x$ である。ここで接点の座標を (t, t^2) とおくと、接線の傾きは $2t$ より、接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2t(x-t) + t^2 \\ \Leftrightarrow y &= 2tx - t^2 \end{aligned}$$

と書ける。この直線が点 P を通るので、 $P(a, b)$ を代入して整理すると

$$\begin{aligned} b &= 2ta - t^2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2at + b &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $x = q, r$ はこの方程式の解であり、 $q < r$ より $q = a - \sqrt{a^2 - b}, r = a + \sqrt{a^2 - b}$ であるので、これらを接線の方程式に代入すると

$$\begin{aligned} y &= 2(a - \sqrt{a^2 - b})x - (a - \sqrt{a^2 - b})^2 \\ y &= 2(a + \sqrt{a^2 - b})x - (a + \sqrt{a^2 - b})^2 \end{aligned}$$

を得る。これらが求める 2 本の接線の方程式である。

$$(\text{答}) \quad y = 2(a - \sqrt{a^2 - b})x - (a - \sqrt{a^2 - b})^2, y = 2(a + \sqrt{a^2 - b})x - (a + \sqrt{a^2 - b})^2$$

(2)

直線 PQ, PR の x 軸と正の向きになす角をそれぞれ α, β とおくと、

$$\tan \alpha = 2(a - \sqrt{a^2 - b})$$

$$\tan \beta = 2(a + \sqrt{a^2 - b})$$

が成り立つ。ここで $\angle QPR = 45^\circ$ より $\alpha - \beta = 45^\circ$ である。 $\tan(\alpha - \beta)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{2(a - \sqrt{a^2 - b}) - 2(a + \sqrt{a^2 - b})}{1 + 2(a - \sqrt{a^2 - b}) \cdot 2(a + \sqrt{a^2 - b})} \\ &= -\frac{4\sqrt{a^2 - b}}{1 + 4b} \end{aligned}$$

であるから、 $1 + 4b \neq 0 \therefore b \neq -\frac{1}{4}$ のとき、この値が 1 と等しいので

$$-\frac{4\sqrt{a^2 - b}}{1 + 4b} = 1$$

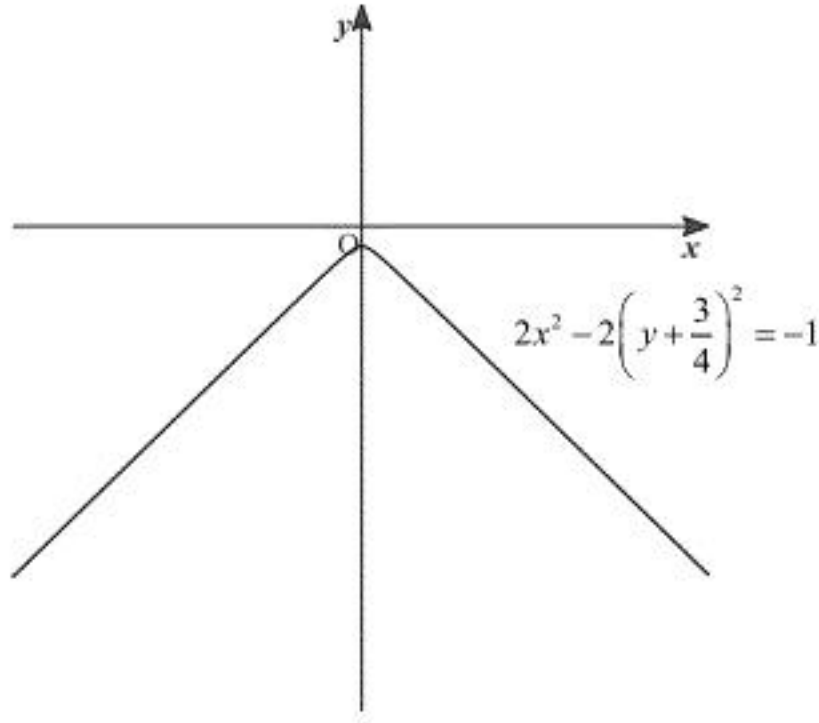
$$\Leftrightarrow -4\sqrt{a^2 - b} = 1 + 4b \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす。ここで両辺を 2 乗すると、

$$\begin{aligned} 16(a^2 - b) &= (1 + 4b)^2 \\ \Leftrightarrow 16a^2 - 16\left(b + \frac{3}{4}\right)^2 &= -8 \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 2\left(b + \frac{3}{4}\right)^2 &= -1 \end{aligned}$$

が成り立つ。①において、左辺は常に負であることから、 $1 + 4b < 0 \Leftrightarrow b < -\frac{1}{4}$ である。これ

は、 $b \neq -\frac{1}{4}$ を満たす。以上より、求める点 P の軌跡は $2x^2 - 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = -1 \left(y < -\frac{1}{4}\right)$ である。また、これは双曲線であり、座標平面に図示すると下図のようになる。



$$(\text{答}) \quad \text{軌跡: } 2x^2 - 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = -1 \left(y < -\frac{1}{4}\right), \text{ 図: 上図}$$

4 - II

(1)

C_1, C_2 が共通接線をもつので、共有点 P の x 座標を t ($t > 0$) とすると C_1, C_2 における y 座標を比較して

$$\log t = at^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。さらに C_1 の点 P における接線の傾きは $\frac{1}{t}$ 、 C_2 の点 P における接線の傾きは $2at$ であり、これらは等しいので

$$\frac{1}{t} = 2at \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①、②を連立すると

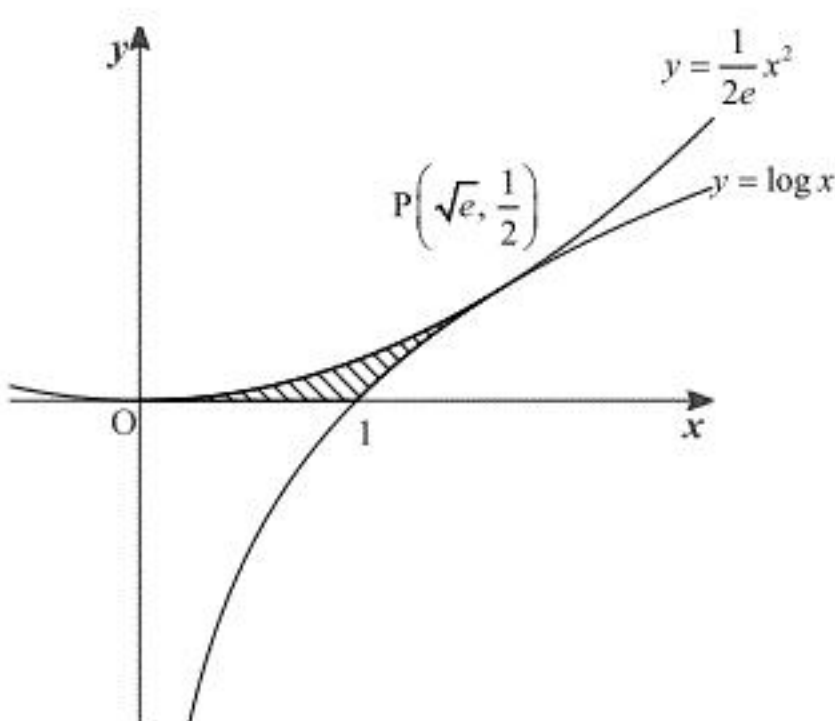
$$\begin{aligned} &\begin{cases} \log t = at^2 \\ \frac{1}{t} = 2at \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \log t = at^2 \\ a = \frac{1}{2t^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \log t = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2t^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} t = \sqrt{e} \\ a = \frac{1}{2e} \end{cases} \end{aligned}$$

を得る。よって、点 P の座標は $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$ と求まる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{2e}, P\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$$

(2)

(1)より C_2 は $y = \frac{1}{2e}x^2$ と書けるので、 C_1, C_2 を座標平面に図示すると下図のようになる。



ここで求める面積 S は上図の斜線部であるので、 $S = \int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{2e}x^2 dx - \int_1^{\sqrt{e}} \log x dx$ と書ける。これ

を計算すると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{2e}x^2 dx - \int_1^{\sqrt{e}} \log x dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2e}x^3\right]_0^{\sqrt{e}} - [x \log x - x]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{1}{6e} \cdot e\sqrt{e} - 0 - (\sqrt{e} \cdot \log \sqrt{e} - \sqrt{e}) + (1 \cdot \log 1 - 1) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{e} - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3}\sqrt{e} - 1$$