

数 学 (120 分)

(平成 24 年度 海洋科学部 前期日程)

注 意 事 項

問 題 冊 子	解 答 用 紙
1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。 2. 問題冊子は全部で 10 ページである。表紙を開くと白紙があり、その裏が 1 ページ目である。不鮮明な印刷、ページの脱落に気付いたときは、試験監督者に申し出ること。 3. 問題冊子は持ち帰ること。	1. すべての解答用紙に受験番号、氏名を記入すること。記入を忘れたときは失格となることがある。 2. 解答用紙の枚数は、5 枚である。 3. 解答は、指定された箇所に記入すること。なお、解答は答えだけでなく途中の計算も記入すること。

1 3 次関数 $f(x) = -x^3 + 3ax^2 + b$ (a, b は実数の定数) について, 次の間に答えよ. (配点 : 50 点)

- (1) $a = 1, b = 3$ のとき, $f(x)$ の極値を求め, $y = f(x)$ のグラフをかけ.
- (2) $0 \leq x \leq 2$ のとき $f(x) \leq 4$ となるための a, b の条件を求めよ.

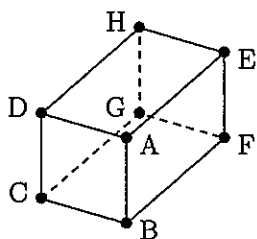
注意 : 以下の余白, および右ページは計算用である. 解答は, 解答用紙に記入せよ.

- 2 a を正の定数とする. 放物線 $C : y = (1-x)(x+a)$ と C 上の動点 $P(t, (1-t)(t+a))$ について, 次の問に答えよ. ただし, $0 < t < 1$ とする.
(配点 : 50 点)

- (1) x 軸に関して P と対称な点を Q , xy 平面の原点を O とし, 放物線 C と y 軸および 2 つの線分 PQ , OQ とで囲まれた図形の面積を S とするとき, S を t と a で表せ.
- (2) S を最大にする t が $\frac{3}{4} < t < \frac{4}{5}$ の範囲に存在することを示せ.

注意 : 以下の余白, および右ページは計算用である. 解答は, 解答用紙に記入せよ.

- 3 下図のような 8 個の点 A, B, C, D, E, F, G, H を頂点とする直方体がある。



ここで、 $AB=1$, $BC=1$, $AE=2$ である。8 個の頂点から相異なる 3 点を選ぶとき、その 3 点を頂点とする三角形の面積を S とする。このとき、次の問に答えよ。ただし、どの 3 点を選ばれる確率も等しいとする。

(配点：50 点)

- (1) 3 点 A, C, H を選んだとき、 S の値を求めよ。
- (2) $S=1$ となる確率を求めよ。
- (3) S の期待値を求めよ。

注意：以下の余白、および右ページは計算用である。解答は、解答用紙に記入せよ。

4 $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$ として数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{4}{3}, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき、次の問に答えよ。(配点：50点)

(1) $f(x)$ は区間 $\frac{4}{5} \leq x \leq \frac{4}{3}$ で減少することを示せ.

(2) $\frac{4}{5} \leq a_n \leq \frac{4}{3}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ.

(3) $\frac{1}{3} \left(\frac{9}{25} \right)^{n-1} \leq |a_n - 1| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{9}{16} \right)^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ.

注意：以下の余白、および右ページは計算用である。解答は、解答用紙に記入せよ。

5 空間内に三角形 ABC と定点 O を中心とする半径 1 の球面 S とがある. 点 P が S 上のすべての点を動くときの $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最大値, 最小値をそれぞれ M, m とするとき, 次の問に答えよ. ただし, 三角形 ABC の重心 G は $OG > 1$ をみたすものとする. (配点: 50 点)

- (1) $M = AQ^2 + BQ^2 + CQ^2$ となる S 上の点を Q , $m = AR^2 + BR^2 + CR^2$ となる S 上の点を R とするとき, 3 点 Q, R, G は 1 直線上にあることを示せ.
- (2) $\sqrt{M - (GA^2 + GB^2 + GC^2)} - \sqrt{m - (GA^2 + GB^2 + GC^2)}$ の値は三角形 ABC に無関係に定まることを示し, その値を求めよ.

注意: 以下の余白, および右ページは計算用である. 解答は, 解答用紙に記入せよ.