平成 24 年度

東京海洋大学 海洋工学部

個別学力検査 **数学** 試験問題

1 （配点 25 点）

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される移動により点 (x, y) が点 (x', y') に移るとき

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

が常に成り立つとする．

(1) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

(2) 行列 A^2 で表される移動が，原点に関する対称移動になるような行列 A をすべて求めよ．

2 （配点 25 点）

x の整式 $f_n(x)$ （$n = 0, 1, 2, \cdots$）を

$$\begin{cases} f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \\ f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

で定める．

(1) 方程式 $f_5(x) = 0$ を解け．

(2) $f_n(\cos\theta) = \cos n\theta \quad (n = 2, 3, 4, 5)$ を示せ．

(3) $\cos\dfrac{\pi}{10}$，$\cos\dfrac{3\pi}{10}$，$\cos\dfrac{7\pi}{10}$，$\cos\dfrac{9\pi}{10}$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ （配点 25 点）

定数 a（$a \neq 1$）に対し，$f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a$ とする．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の解を a を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ の極値を a を用いて表せ.

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ.

ただし，$\displaystyle\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ （C は積分定数）を用いてよい.

$\boxed{\text{4-I}}$, $\boxed{\text{4-II}}$ **どちらかを選択**

$\boxed{\mathbf{4\text{-}I}}$ （配点 25 点）

座標平面上の放物線 $y = x^2$ に点 $\mathrm{P}(a, b)$（ただし，$b < a^2$）から異なる 2 本の接線を引き，放物線との接点をそれぞれ $\mathrm{Q}(q, q^2)$，$\mathrm{R}(r, r^2)$（ただし，$q < r$）とする．

(1) 2 本の接線の方程式を a，b を用いて表せ.

(2) $\angle\mathrm{QPR} = 45^\circ$ を満たす点 P の軌跡を求めて図示せよ.

$\boxed{\mathbf{4\text{-}II}}$ （配点 25 点）

曲線 $C_1 : y = \log x$ と放物線 $C_2 : y = ax^2$ （ただし，a は正の定数）を考える．

(1) C_1 と C_2 が共有点 P において共通接線をもつとき（すなわち，点 P における C_1 と C_2 の接線が同一のとき），a の値と P の座標を求めよ.

(2) (1) のとき，C_1，C_2 および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.