

(1)

$f(x) = -x^3 - x^2 + 8x + 1$ よりこれを微分すると

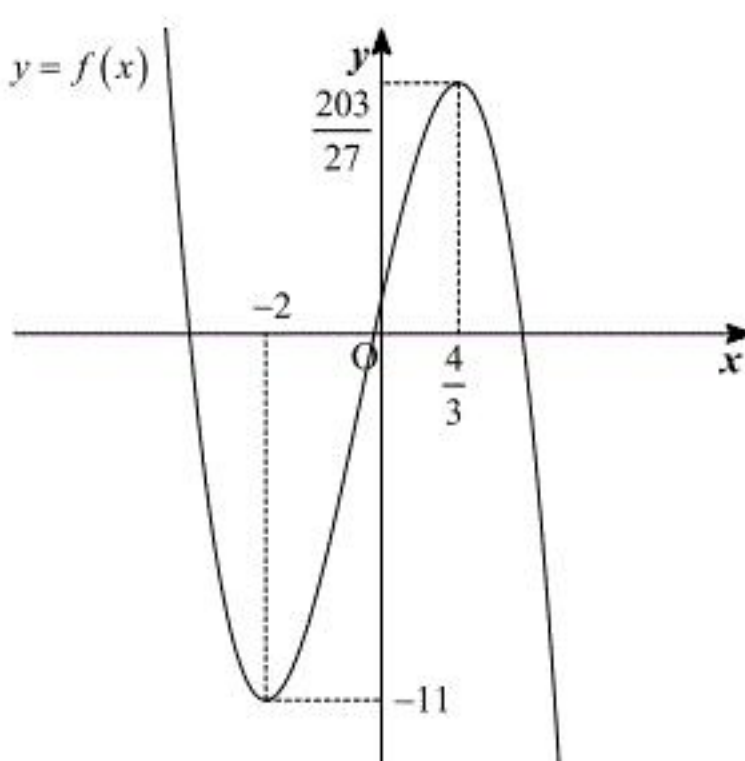
$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 - 2x + 8 \\ &= -(x+2)(3x-4) \end{aligned}$$

と表せるから、 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2, \frac{4}{3}$ である。よって $x < -2, \frac{4}{3} < x$ のとき $f'(x) < 0$,

$-2 < x < \frac{4}{3}$ のとき $f'(x) > 0$ である。また $f(-2) = -11, f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{203}{27}$ より、増減表は以下のようになる。

x	...	-2	...	$\frac{4}{3}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-11	$\nearrow$	$\frac{203}{27}$	$\searrow$

増減表より、 $f(x)$ は $x = -2$ のとき極小値 -11 をとり、 $x = \frac{4}{3}$ のとき極大値 $\frac{203}{27}$ をとる。また、 $f(x)$ の概形は下図となる。したがって、 $f(x)$ の概形は下図となる。



(答) 極大値： $\frac{203}{27}$ ，極小値： -11 ， $f(x)$ のグラフ：上図

(2)

$x = \sin \theta + \cos \theta$ とおくと

$$\begin{aligned} x &= \sin \theta + \cos \theta \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

と計算できる。 $0 \leq \theta \leq \pi$ より $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$ であるから、 $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$ を得る。またこの

とき y は $y = -x^3 - x^2 + 8x + 1$ と表せるので、(1)より $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$ における y の増減表は以下のようになる。

x	-1	...	$\frac{4}{3}$	...	$\sqrt{2}$
y'	+	+	0	-	-
y	-7	$\nearrow$	$\frac{203}{27}$	$\searrow$	$6\sqrt{2}-1$

ここで増減表より最大値は $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{203}{27}$ である。また極小値は $f(1), f(\sqrt{2})$ のうち大きいほうである。これらを計算すると

$$\begin{aligned} f(-1) &= -(-1)^3 - (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 1 \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= -(\sqrt{2})^3 - (\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{2} + 1 \\ &= 6\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

であり、 $\sqrt{2} > 0$ から $6\sqrt{2} - 1 > 6 \cdot 0 - 1 = -1 > -7$ が成り立つので $f(\sqrt{2}) > f(1)$ である。したがって最小値は $f(1) = -7$ である。

(答) 最大値： $\frac{203}{27}$ ，最小値： -7

(1)

$f(x) = \int_0^1 (1-t)\{a(x-t)+b\} dt$ とすると、これを計算して

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t)\{a(x-t)+b\} dt &= \int_0^1 \{at^2 - (a+ax+b)t + (ax+b)\} dt \\ &= \left[\frac{a}{3}t^3 - \frac{a+ax+b}{2}t^2 + (ax+b)t \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{3} - \frac{a+ax+b}{2} + ax+b \\ &= \frac{1}{2}ax - \frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{1}{2}ax - \frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b$$

(2)

直線 $y = ax + b$ が点 $(1, 1)$ を通るので、代入して $a + b = 1$ を得る。このとき

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{2}ax - \frac{1}{6}a + \frac{1}{2}(1-a) \\ &= \frac{1}{2}ax - \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。したがって $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$ は

$$\begin{aligned}\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}ax - \frac{2}{3}a + \frac{1}{2} \right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{a^2}{4}x^2 + a\left(-\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}\right)x + \left(-\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}\right)^2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{a^2}{12}x^3 + \frac{a}{2}\left(-\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}\right)^2 x \right]_0^1 \\ &= \frac{a^2}{12} + \frac{a}{2}\left(-\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{7}{36}a^2 - \frac{5}{12}a + \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{36}\left(a - \frac{15}{14}\right)^2 + \frac{3}{112}\end{aligned}$$

より、 $a = \frac{15}{14}$ のとき最小値 $\frac{3}{112}$ を得る。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{15}{14}$$

(1)

3人でじゃんけんをするときの手の出し方は全部で $3^3 = 27$ (通り)である。一方、「あいこ」になるのは3人とも同じ手を出す場合か3人とも違う手を出す場合である。

[1] 3人とも同じ手を出す場合

手の出し方は3通りである。

[2] 3人とも違う手を出す場合

3人がグー、チョキ、パーのいずれかの手を出すので、 $3!$ 通りである。

[1], [2]は互いに排反なので、求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{3+3!}{27} &= \frac{9}{27} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

とわかる。

(答) $\frac{1}{3}$

(2)

4人でじゃんけんをするときの手の出し方は全部で $3^4 = 81$ (通り)である。勝者が1人である場合と2人である場合を考える。

[1] 勝者が1人である場合

勝者の選び方は4通りであり勝者の出す手は3通りである。またこのとき他の3人が出す手は一意に定まるので、求める確率は、

$$\frac{3 \cdot 4}{81} = \frac{4}{27}$$

とわかる。

[2] 勝者が2人である場合

勝者の選び方は ${}_4C_2 = 6$ (通り)であり出す手は3通りである。[1]と同様に他の2人が出す手は一意に定まるので、求める確率は、

$$\frac{6 \cdot 3}{81} = \frac{2}{9}$$

とわかる。

(答) 勝者が1人である確率： $\frac{4}{27}$ 、2人である確率： $\frac{2}{9}$

(3)

n ($n=3, 4, \dots$) 人でじゃんけんをしたとき勝敗が決まる場合を考える。まず全事象は 3^n 通りである。勝負に使われる2種類の手の選び方が ${}_3C_2 = 3$ (通り)であり、 n 人がそれぞれ2種類の手のうちどちらかを出すので、全員同じ手になる2通りに注意すると勝敗が決まる場合は全部で $2^n - 2$ (通り)である。したがって勝敗が決まる確率は、

$$\frac{3 \cdot (2^n - 2)}{3^n} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$$

である。これはあいこになる場合の余事象であるから、求める確率は

$$1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$$

である。

(答) $1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$

(1)

$a_1 > 0$, $27^{n^2-3n-9} > 0$ であるから、漸化式より帰納的に $a_n > 0$ となる。よって、 $a_{n+1} = 27^{n^2-3n-9} a_n$ の両辺で底3の対数をとると、

$$\begin{aligned}\log_3 a_{n+1} &= \log_3 27^{n^2-3n-9} a_n \\ \Leftrightarrow \log_3 a_{n+1} &= \log_3 a_n + (n^2 - 3n - 9) \log_3 27 \\ \Leftrightarrow \log_3 a_{n+1} &= \log_3 a_n + 3(n^2 - 3n - 9)\end{aligned}$$

と計算できる。 $b_n = \log_3 a_n$ とおくと $b_{n+1} - b_n = 3(n^2 - 3n - 9)$ が成り立つので、 $n \geq 2$ のとき

b_n は

$$\begin{aligned}b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3(k^2 - 3k - 9) \\ &= \log_3 a_1 + 3 \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) - 9 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) - 27(n-1) \\ &= (n-1)(n^2 - 5n - 27) \quad (\because a_1 = 1)\end{aligned}$$

となる。 $n=1$ のとき $b_n = 0$ であるから、この一般項は $n \geq 1$ で成り立つ。ここで $b_n = \log_3 a_n$

すなわち $a_n = 3^{b_n}$ であるので、 $\{a_n\}$ の一般項は $3^{(n-1)(n^2-5n-27)}$ ($n=1, 2, \dots$) と書ける。

$$(\text{答}) \quad a_n = 3^{(n-1)(n^2-5n-27)}$$

(2)

最小の a_n を求めるため $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ と1を比較することを考える。 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を計算すると、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 27^{n^2-3n-9}$$

である。

[1] $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ の場合

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 27^{n^2-3n-9} > 1$ であり、辺々で底3の対数をとっても不等号の向きは不変であるので、

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &> 1 \\ \Leftrightarrow n^2 - 3n - 9 &> 0 \\ \Leftrightarrow n &< \frac{3-3\sqrt{5}}{2}, \frac{3+3\sqrt{5}}{2} < n\end{aligned}$$

$$\therefore 5 \leq n \quad (\because 2.2 < \sqrt{5} < 2.3 \text{ より } 4 < \frac{3+3\sqrt{5}}{2} < 5)$$

を得る。この結果から $a_5 < a_6 < \dots$ がわかる。

[2] $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ の場合

[1]と同様に計算すると、

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 27^{n^2-3n-9} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow n^2 - 3n - 9 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3-3\sqrt{5}}{2} &\leq n \leq \frac{3+3\sqrt{5}}{2} \\ \therefore 1 &\leq n \leq 4 \quad (\because 4 < \frac{3+3\sqrt{5}}{2} < 5)\end{aligned}$$

を得るから、 $a_5 < a_4 < a_3 < a_2 < a_1$ がわかる。

以上[1], [2]より、不等式 $a_1 > \dots > a_4 > a_5 < a_6 < \dots$ が成り立つから、 a_n の値が最小となるときの n の値は $n=5$ である。

$$(\text{答}) \quad n=5$$

(1)

$$O(0,0,0), A(3,0,0), B(1,\sqrt{2},1), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right), R(0,-1,\sqrt{2})より,$$

$$\begin{aligned}\cos\angle AOC &= \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OC}}{|\overline{OA}|\cdot|\overline{OC}|} \\ &= \frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0+0}{3\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\angle BOC &= \frac{\overline{OB}\cdot\overline{OC}}{|\overline{OB}|\cdot|\overline{OC}|} \\ &= \frac{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\angle AOR &= \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OR}}{|\overline{OA}|\cdot|\overline{OR}|} \\ &= \frac{3\cdot 0+0\cdot(-1)+0\cdot\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{0^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}} \\ &= 0 \\ \cos\angle BOR &= \frac{\overline{OB}\cdot\overline{OR}}{|\overline{OB}|\cdot|\overline{OR}|} \\ &= \frac{1\cdot 0+\sqrt{2}\cdot(-1)+1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。したがって、それぞれ、

$$\angle AOC=\frac{\pi}{6}, \angle BOC=\frac{\pi}{6}, \angle AOR=\frac{\pi}{2}, \angle BOR=\frac{\pi}{2}$$

とわかる。

$$(答) \quad \angle AOC=\frac{\pi}{6}, \angle BOC=\frac{\pi}{6}, \angle AOR=\frac{\pi}{2}, \angle BOR=\frac{\pi}{2}$$

(2)

$$\overline{OA}=(3,0,0), \overline{OB}=(1,\sqrt{2},1), \overline{OC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)であり,$$

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}(1,\sqrt{2},1)+\frac{\sqrt{3}}{9}(3,0,0) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\overline{OB}+\frac{\sqrt{3}}{9}\overline{OA}\end{aligned}$$

と計算できるので、点Cは点O, A, Bを含む平面上の点であるとわかる。したがって、4点O, A, B, Cは同一平面上にある。

(証明終)

(3)

題意より $\overline{OP}=(3s,0,0)$, $\overline{OQ}=(t,\sqrt{2}t,t)$ であるから、 $OP=3s$, $OQ=2t$ となる。(1)の結果より

$\angle AOC=\angle BOC$ であるから、3点P, C, Qが1直線上にあるとき、

$$\begin{aligned}CP:CQ &= OP:OQ \\ &= 3s:2t\end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \frac{2t}{3s+2t}\overline{OP}+\frac{3s}{3s+2t}\overline{OQ} \\ &= \frac{2t}{3s+2t}(3s,0,0)+\frac{3s}{3s+2t}(t,\sqrt{2}t,t) \\ &= \left(\frac{9st}{3s+2t},\frac{3\sqrt{2}st}{3s+2t},\frac{3st}{3s+2t}\right)\end{aligned}$$

を得る。C $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ より、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{9st}{3s+2t}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}st}{3s+2t}=\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{3st}{3s+2t}=\frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases} \\ \Leftrightarrow 2(3\sqrt{3}s-1)t=3s\end{aligned}$$

とわかる。ここで $s=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ と仮定すると $3s=0$ となり矛盾するので $s\neq\frac{1}{3\sqrt{3}}$ であり、

$$t=\frac{3s}{2(3\sqrt{3}s-1)}\text{を得る。また、(1)より}\angle AOR=\frac{\pi}{2}, \angle BOR=\frac{\pi}{2}\text{であるので}$$

$\angle POR=\frac{\pi}{2}$, $\angle QOR=\frac{\pi}{2}$ が言える。このことから、四面体OPQRの体積Vは、

$$V=\frac{1}{3}OR\cdot\triangle OPQ$$

と表せる。ここで、

$$\begin{aligned}\triangle OPQ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overline{OP}|^2\cdot|\overline{OQ}|^2-(\overline{OP}\cdot\overline{OQ})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(3s)^2(2t)^2-(3st)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}st\end{aligned}$$

であり、(1)から $OR=\sqrt{3}$ であるので、

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}st \\ &= \frac{3}{2}st\end{aligned}$$

を得る。さらに $t=\frac{3s}{2(3\sqrt{3}s-1)}$ を代入して、

$$\begin{aligned}V &= \frac{3}{2}s\cdot\frac{3s}{2(3\sqrt{3}s-1)} \\ &= \frac{9}{4}\cdot\frac{s^2}{3\sqrt{3}s-1} \\ &= \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}} \\ &= \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{-\left(\frac{1}{s}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{27}{4}}\end{aligned}$$

と書ける。Vが最小となるとき $-\left(\frac{1}{s}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{27}{4}$ は最大であり、 $\frac{1}{s}>0$ であることに注意す

ると、それは $s=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ のときである。ゆえにVの最小値は、

$$\begin{aligned}V &= \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\frac{27}{4}} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。このとき点Pの座標はP $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,0\right)$ とわかる。さらに、

$$\begin{aligned}t &= \frac{3s}{2(3\sqrt{3}s-1)} \\ &= \frac{3\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}}{2\left(3\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}-1\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

であるから、点Qの座標はQ $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ とわかる。

$$(答) \quad \text{四面体OPQRの体積の最小値：}\frac{1}{3}, \text{点P}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,0\right), \text{点Q}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$