

(1)

$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ としたとき,

$$\begin{aligned} |Q| &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \cos^2 \theta - (\sin \theta)(-\sin \theta) \\ &= 1 (\neq 0) \end{aligned}$$

より Q は正則であるから逆行列が存在し,

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

と書ける。よって, $Q^{-1}SQ$ を計算すると

$$\begin{aligned} Q^{-1}SQ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+3\cos 2\theta & 3\sin 2\theta \\ 3\sin 2\theta & 2-3\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta(2+3\cos 2\theta)+3\sin 2\theta\sin \theta & 3\sin 2\theta\cos \theta+\sin \theta(2-3\cos 2\theta) \\ -\sin \theta(2+3\cos 2\theta)+3\sin 2\theta\cos \theta & -3\sin 2\theta\sin \theta+\cos \theta(2-3\cos 2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5\cos \theta & 5\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} (\because \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta, \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta) \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1) \end{aligned}$$

より, これは対角行列である。

(証明終)

(2)

2×2 行列 X を $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと, (1)より $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} XD &= DX \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5a & -b \\ 5c & -d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5a & 5b \\ -c & -d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書ける。各要素を比較すると

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5a = 5a \\ -b = 5b \\ 5c = -c \\ -d = -d \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

であるから, $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ より X は対角行列とわかる。

(証明終)

(3)

(1)より $D = Q^{-1}SQ$ から $SQ = QD$ が成り立つので

$$\begin{aligned} TS &= ST \\ \Leftrightarrow TSQ &= STQ \\ \Leftrightarrow TQD &= STQ (\because SQ = QD) \\ \Leftrightarrow Q^{-1}TQD &= Q^{-1}STQ \\ \Leftrightarrow Q^{-1}TQD &= Q^{-1}(QDQ^{-1})TQ (\because S = QDQ^{-1}) \\ \Leftrightarrow Q^{-1}TQD &= DQ^{-1}TQ \end{aligned}$$

を得る。ここで $Y = Q^{-1}TQ$ とおくと, $YD = DY$ を満たすので, (2)より $Y = Q^{-1}TQ$ は対角行列である。

(証明終)

(1)

A_0 を始点として考えると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_0B_1} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0C_0} \\ \overrightarrow{A_0C_1} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_0} \\ \overrightarrow{A_0A_1} &= \overrightarrow{A_0B_0} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_0C_0} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0})\end{aligned}$$

とわかるので, $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_1} &= \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0A_1} \\ &= \overrightarrow{OA_0} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}) \\ \overrightarrow{A_1B_1} &= \overrightarrow{A_1A_0} + \overrightarrow{A_0B_1} \\ &= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0C_0} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_0} \\ \overrightarrow{A_1C_1} &= \overrightarrow{A_1A_0} + \overrightarrow{A_0C_1} \\ &= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_0} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0C_0}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_0} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}), \overrightarrow{A_1B_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_1C_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0C_0}$$

(2)

それぞれ点 $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ を点 $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$ に対応させ, (1)と同様にして,

$$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) \text{ を得る。さらに(1)から}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_0} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}), \overrightarrow{A_1B_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_1C_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0C_0} \text{ を代入すると}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_2} &= \overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) \\ &= \overrightarrow{OA_0} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_0} - \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0C_0}\right) \\ &= \overrightarrow{OA_0} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0})\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_0} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0})$$

(3)

(2)と同様にそれぞれ点 $A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}, A_n, B_n, C_n$ に点 $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$ を対応させると,

(1)と同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_n} &= \overrightarrow{OA_{n-1}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_{n-1}B_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-1}C_{n-1}}) \\ \overrightarrow{A_nB_n} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_{n-1}B_{n-1}} \\ \overrightarrow{A_nC_n} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_{n-1}C_{n-1}}\end{aligned}$$

が成り立つ。よって $\overrightarrow{A_nB_n}, \overrightarrow{A_nC_n}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_nB_n} &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \overrightarrow{A_0B_0} \\ \overrightarrow{A_nC_n} &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \overrightarrow{A_0C_0}\end{aligned}$$

と書けるので, $\overrightarrow{OA_n}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_n} &= \overrightarrow{OA_{n-1}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OA_{n-1}} &= -\left(-\frac{1}{2}\right)^n(\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}) \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と書きかえられる。よって①の n に $1, 2, \dots, n$ を代入したものを足し合わせると, $n \geq 1$ において,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (\overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OA_{k-1}}) &= -\sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k (\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OA_0} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} (\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA_n} &= \overrightarrow{OA_0} + \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} (\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0})\end{aligned}$$

を得る。これは, $n=0$ においても

$$\overrightarrow{OA_0} + \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^0 \right\} (\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}) = \overrightarrow{OA_0}$$

となるから, 成り立つ。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_0} + \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} (\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0})$$

(1)

$f(x) = x^3 - x + 1$ とおく。関数 $f(x)$ を x について微分すると、 $f'(x) = 3x^2 - 1$ である。したがって実数 t について点 $(t, t^3 - t + 1)$ における曲線 K の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t + 1 \\ \Leftrightarrow y &= (3t^2 - 1)x - 2t^3 + 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = (3t^2 - 1)x - 2t^3 + 1$$

(2)

(1)より曲線 K 上の点 $(t, t^3 - t + 1)$ における接線 l は $y = (3t^2 - 1)x - 2t^3 + 1$ と書けるので、この直線が点 $(1, 5)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} 5 &= (3t^2 - 1) \cdot 1 - 2t^3 + 1 \\ \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)(2t^2 - 5t + 5) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $2t^2 - 5t + 5 = 0$ における判別式を D とすると $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -15 < 0$ であるため、

$2t^2 - 5t + 5 = 0$ を満たす実数 t は存在しない。したがって $t = -1$ であり $f(-1) = 1$ であるから、接点の座標は $(-1, 1)$ である。

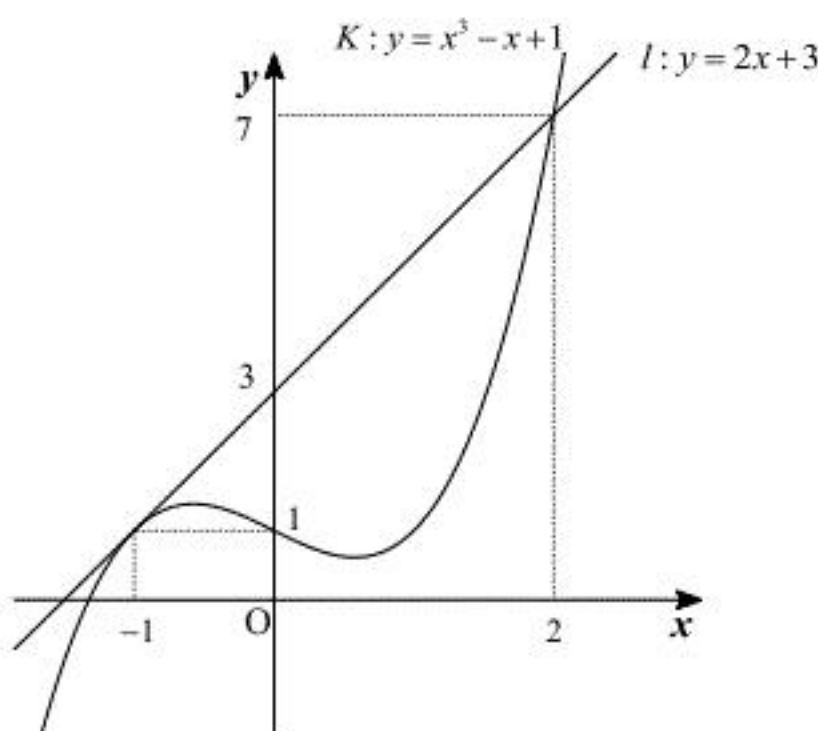
$$(\text{答}) \quad (-1, 1)$$

(3)

(1), (2)より直線 l の方程式は $y = 2x + 3$ である。 $f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ であるから、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって点 $(-1, 1)$ における接線と曲線 K は以下のグラフのようになる。



曲線 K と直線 l の共有点の x 座標は $x^3 - x + 1 = 2x + 3$ の解であるから、これらを連立して

$$\begin{aligned} x^3 - x + 1 &= 2x + 3 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

を得る。よって曲線 K と直線 l は $x = -1, 2$ で共有点をもち、 $f(2) = 7$ から曲線 K と直線 l の共有点のうち接点でない共有点の座標は $(2, 7)$ である。したがって直線 l と曲線 K で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \{2x + 3 - (x^3 - x + 1)\} dx &= \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{27}{4}$$

4-I

(1)

点Pは点A(t, t), B($t-1, -t+1$)を1:2に内分する点より、点Pは

$$P\left(\frac{1 \cdot (t-1) + 2 \cdot t}{3}, \frac{1 \cdot (-t+1) + 2 \cdot t}{3}\right) = P\left(\frac{3t-1}{3}, \frac{t+1}{3}\right)$$

と書ける。ここで点PをP(X, Y)とおくと

$$\begin{cases} X = \frac{3t-1}{3} \\ Y = \frac{t+1}{3} \end{cases}$$

となる。2式から t を消去して、

$$\begin{aligned} 3X &= 3(3Y-1)-1 \\ \Leftrightarrow Y &= \frac{1}{3}X + \frac{4}{9} \end{aligned}$$

を得る。 t がすべての実数を動くので X, Y もすべての実数を動くから、点Pの軌跡は

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$$

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$$

(2)

A(t, t), B($t-1, -t+1$)より直線ABの方程式の傾きは $\frac{(-t+1)-t}{(t-1)-t} = 2t-1$ であるから、方程式は

$$\begin{aligned} y-t &= (2t-1)(x-t) \\ \Leftrightarrow y &= (2t-1)x - 2t^2 + 2t \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = (2t-1)x - 2t^2 + 2t$$

(3)

直線ABの方程式は

$$2t^2 - 2(x+1)t + x + y = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

のように t の2次方程式とみなすことができる。 t がすべての実数を動くとき、①を満たす

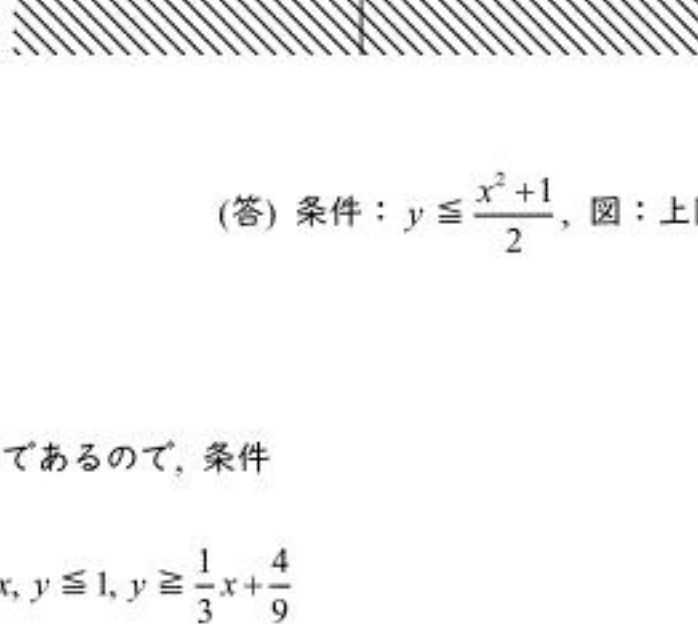
実数 t が存在すればよく、その条件は①の判別式 D が $D \geq 0$ を満たすことであるから

$$\frac{D}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 2(x+y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y \leq \frac{x^2+1}{2}$$

が求める x, y についての条件である。これを座標平面に図示すると下図となる。



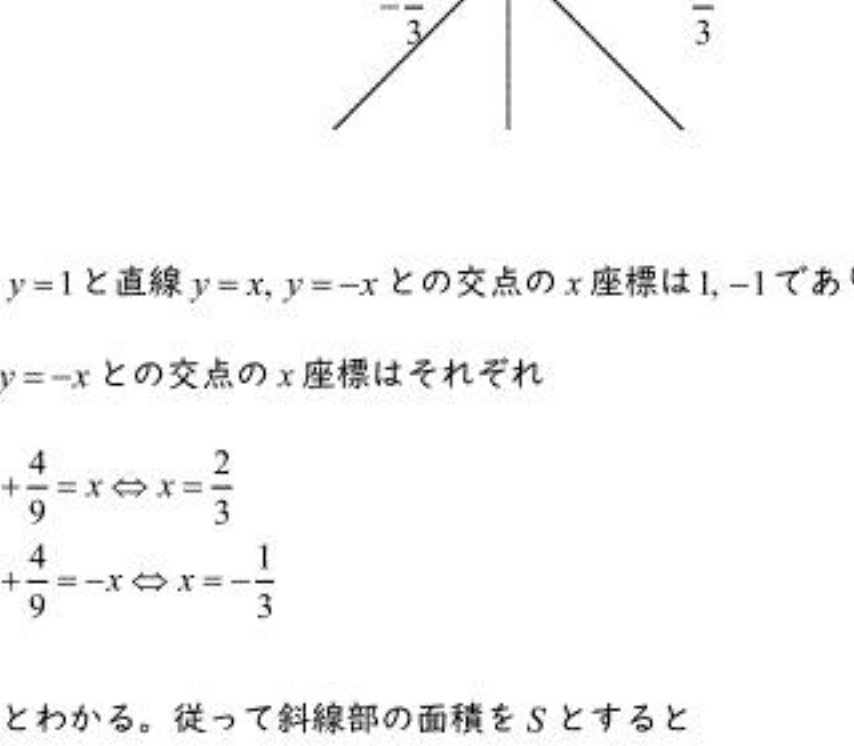
$$(\text{答}) \quad \text{条件: } y \leq \frac{x^2+1}{2}, \text{ 図: 上図の斜線部(境界線を含む)}$$

(4)

(1)より $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$ であるので、条件

$$y \geq x, y \geq -x, y \leq 1, y \geq \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$$

を図示すると下図となる。



ここで直線 $y=1$ と直線 $y=x, y=-x$ との交点の x 座標は $1, -1$ であり、また直線 $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$ と

直線 $y=x, y=-x$ との交点の x 座標はそれぞれ

$$\frac{1}{3}x + \frac{4}{9} = x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{4}{9} = -x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

より $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$ とわかる。従って斜線部の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{2}{3}}^1 (1-x) dx + \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{9} \right) \right\} dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} \{ 1 - (-x) \} dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_{\frac{2}{3}}^1 + \left[\frac{5}{9}x - \frac{1}{6}x^2 \right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} + \left[x + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^{-\frac{1}{3}} \\ &= \left(1 - \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{2} \left\{ 1^2 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right\} + \frac{5}{9} \left\{ \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right\} - \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^2 - \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right\} + \left\{ -\frac{1}{3} - (-1) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{1}{3} \right)^2 - (-1)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{5}{18} + \frac{5}{9} - \frac{1}{18} + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

と求まる。また、領域 D と上図斜線部との共通部分を考えると、

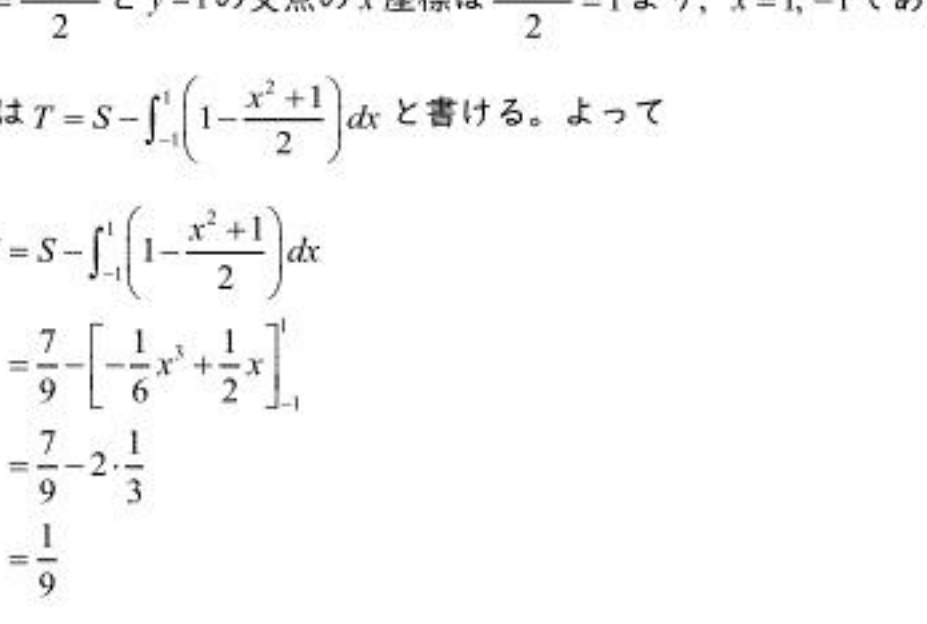
$$\frac{x^2+1}{2} - x = \frac{1}{2}(x-1)^2 \geq 0$$

$$\frac{x^2+1}{2} - (-x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \geq 0$$

$$\frac{x^2+1}{2} - \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 \geq 0$$

より曲線 $y = \frac{x^2+1}{2}$ は常に直線 $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}, y=x, y=-x$ の上部に存在するので、領域 D と上

図斜線部との共通部分を図示すると下図となる。



ここで $y = \frac{x^2+1}{2}$ と $y=1$ の交点の x 座標は $\frac{x^2+1}{2} = 1$ より、 $x=1, -1$ であるから、上図より求め

る面積 T は $T = S - \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{x^2+1}{2} \right) dx$ と書ける。よって

$$\begin{aligned} T &= S - \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{x^2+1}{2} \right) dx \\ &= \frac{7}{9} - \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{7}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{9}$$

4-II

(1)

$f(x)$ を x で微分すると $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$ となるので、 $f'(x) = 0$ をみたす x は

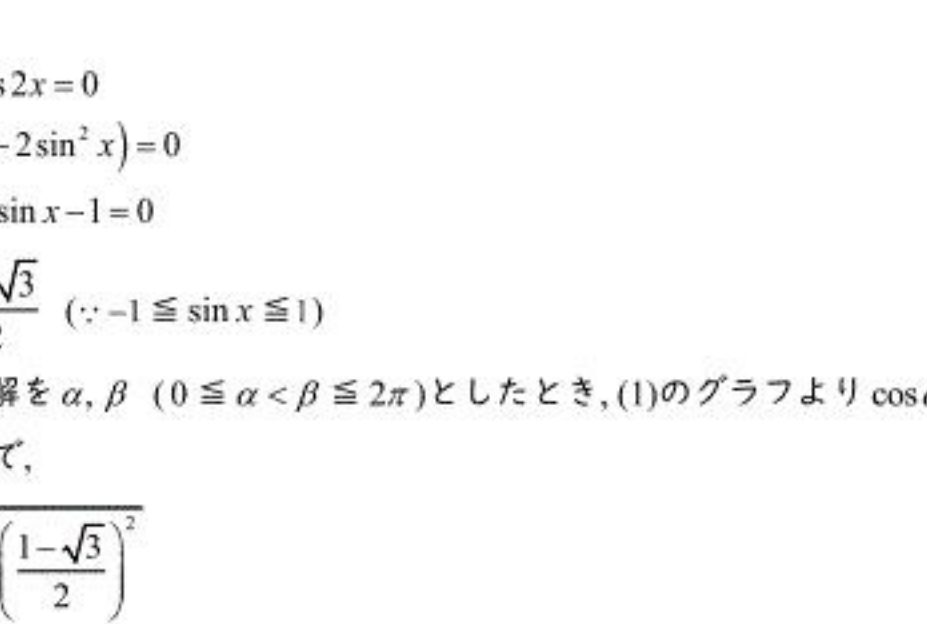
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos x - 2\sin 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos x - 4\sin x \cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos x(1 - 2\sin x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x = 0, \sin x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi) \end{aligned}$$

とわかる。よって $0 \leq x < \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$ のとき $f'(x) > 0$,

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$ のとき $f'(x) < 0$ であるから、増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{5\pi}{6}$	...	$\frac{3\pi}{2}$	...	2π
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3	↗	1

よって $f(x)$ の極大値は $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}, f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ 、極小値は $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$ である。また、このグラフを座標平面上に図示すると下図となる。



(答) 極大値： $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}, f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ 、極小値： $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$ 、グラフの概形：上図

(2)

$f(x) = 0$ のとき、 $\sin x$ の値は

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin x + \cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin x + (1 - 2\sin^2 x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 2\sin x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad (\because -1 \leq \sin x \leq 1) \end{aligned}$$

である。 $f(x) = 0$ の解を α, β ($0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$)としたとき、(1)のグラフより $\cos \alpha < 0$,

$\cos \beta > 0$ がわかるので、

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\sqrt{1 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)^2} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \beta &= \sqrt{1 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \sin \alpha = \sin \beta = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3)

求める面積は $\int_{\alpha}^{\beta} \{-f(x)\} dx$ より、これを計算して

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \{-f(x)\} dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (-2\sin x - \cos 2x) dx \\ &= \left[2\cos x - \frac{1}{2}\sin 2x \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= 2\cos \beta - 2\cos \alpha - \frac{1}{2}(\sin 2\beta - \sin 2\alpha) \\ &= 2\cos \beta - 2\cos \alpha - (\sin \beta \cos \beta - \sin \alpha \cos \alpha) \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\because \sin \alpha = \sin \beta = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= (3 + \sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad (3 + \sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{2}$$