平成25年度

東京海洋大学 海洋工学部

個別学力検査 **数学** 試験問題

1 （配点25点）

$S = \begin{pmatrix} 2+3\cos 2\theta & 3\sin 2\theta \\ 3\sin 2\theta & 2-3\cos 2\theta \end{pmatrix}$ とする．以下，$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列を対角行列と呼ぶ.

(1) $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とするとき，$D = Q^{-1}SQ$ が対角行列になることを示せ.

(2) 2×2 行列 X が $XD = DX$ を満たすとき, X は対角行列になることを示せ.

(3) 2×2 行列 T が $TS = ST$ を満たすとき，$Q^{-1}TQ$ は対角行列になることを示せ.

2 （配点25点）

平面上に異なる 4 点 O，A_0，B_0，C_0 をとる．$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，点 A_n, B_n, C_n をそれぞれ線分 $\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}$，$\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{A}_{n-1}$，$\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}$ の中点とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{C}_0}$ を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{C}_0}$ を用いて表せ.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{C}_0}$ と n を用いて表せ.

3 （配点25点）

座標平面上の曲線 K を $y = x^3 - x + 1$ とする.

(1) 点 $(t, t^3 - t + 1)$ における K の接線の方程式を t を用いて表せ.

(2) 点 $(1, 5)$ を通る直線 l が K と接するとき，接点の座標を求めよ.

(3) 直線 l と K で囲まれた図形の面積を求めよ.
ただし，$\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$ （C は積分定数）を用いてよい.

$\boxed{\text{4-I}}$, $\boxed{\text{4-II}}$ **どちらかを選択**

$\boxed{\textbf{4 - I}}$ （配点 25 点）

座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}\,(t, t)$, $\mathrm{B}\,(t-1, -t+1)$ をとり，線分 AB を 1: 2 に内分する点を P とする．

(1) t がすべての実数を動くとき，点 P の軌跡を求めよ．

(2) 直線 AB の方程式を t を用いて表せ．

(3) (2) で求めた方程式を満たす実数 t が存在するための x, y についての条件を求め，条件を満たす点 (x, y) 全体の領域 D を座標平面内に図示せよ．

(4) (1) で求めた点 P の軌跡の方程式を $y = f(x)$ とする．連立不等式

$$y \geqq x, \quad y \geqq -x, \quad y \leqq 1, \quad y \geqq f(x)$$

の表す領域と領域 D の共通部分の面積を求めよ．

$\boxed{\textbf{4 - II}}$ （配点 25 点）

$f(x) = 2\sin x + \cos 2x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ とする．

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めてグラフの概形をかけ．ただし，凹凸は調べなくてよい．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の解を α，β $(0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi)$ とする．$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$ の値を求めよ．

(3) $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形で，第 4 象限に含まれる部分の面積を求めよ．