

(1)

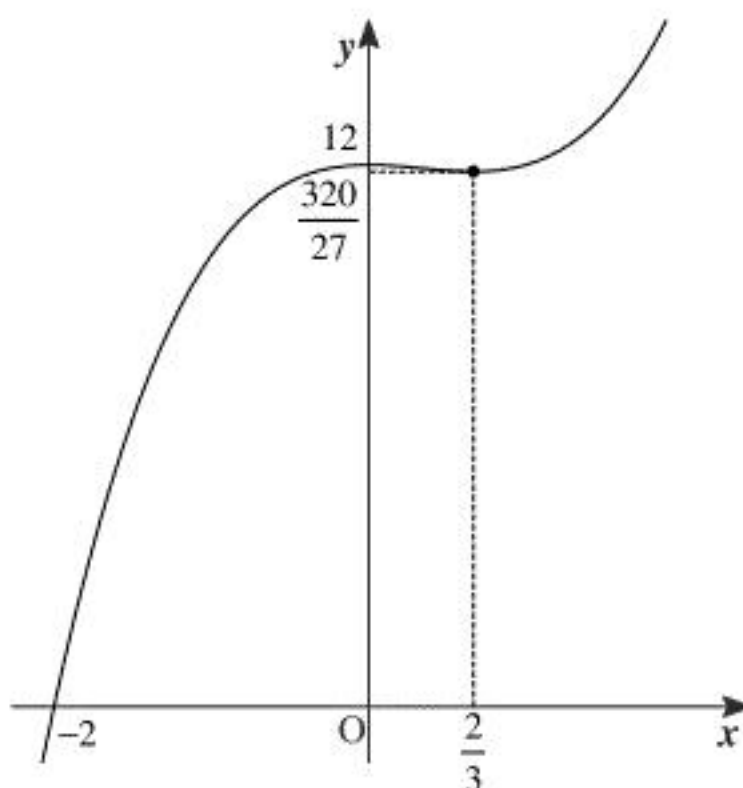
$f(x) = x^3 - x^2 + 12$ について両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2x \\ &= 3x \left(x - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	...	0	...	$\frac{2}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって、 $f(x)$ は $x=0$ のとき極大値 $f(0)=12$ を、 $x=\frac{2}{3}$ のとき極小値 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{320}{27}$ をとり、 $y=f(x)$ のグラフは下图のようになる。



(答) 極大値: 12, 極小値: $\frac{320}{27}$, グラフ: 前図

(2)

数学的帰納法を用いて、すべての自然数 n に対して $1 < a_n < 3$ が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

問題文より $a_1 = 2$ であるから、 $1 < a_1 < 3$ が成立する。

[2] $n=k$ のとき

$n=k$ のとき、 $1 < a_k < 3$ が成り立つと仮定する。このとき、問題文より、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{12}(a_k^3 - a_k^2 + 12) \\ &= \frac{1}{12}f(a_k) \end{aligned}$$

となる。ここで、(1)の増減表より $f(x)$ は $1 \leq x \leq 3$ で単調増加である。したがって、 $1 < a_k < 3$ より、

$$\begin{aligned} f(1) &< f(a_k) < f(3) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{12}(1^3 - 1^2 + 12) &< \frac{1}{12}f(a_k) < \frac{1}{12}(3^3 - 3^2 + 12) \\ \Leftrightarrow 1 < a_{k+1} &< \frac{5}{2} \left(\because a_{k+1} = \frac{1}{12}f(a_k) \right) \\ \Rightarrow 1 < a_{k+1} &< 3 \end{aligned}$$

が得られ、 $n=k+1$ のとき $1 < a_n < 3$ が成立する。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n に対して $1 < a_n < 3$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

$$a_{n+1} = \frac{1}{12}(a_n^3 - a_n^2 + 12) \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{12}(a_n^3 - a_n^2 + 12) &< a_n \\ \Leftrightarrow a_n^3 - a_n^2 - 12a_n + 12 &< 0 \\ \Leftrightarrow (a_n - 1)(a_n^2 - 12) &< 0 \end{aligned}$$

であるから、すべての自然数 n に対して $(a_n - 1)(a_n^2 - 12) < 0$ となることを示せばよい。ここ

で、(2)より、すべての自然数 n に対して $1 < a_n < 3$ であるから、 $a_n - 1 > 0$ 、 $a_n^2 - 12 < 0$ が成り立

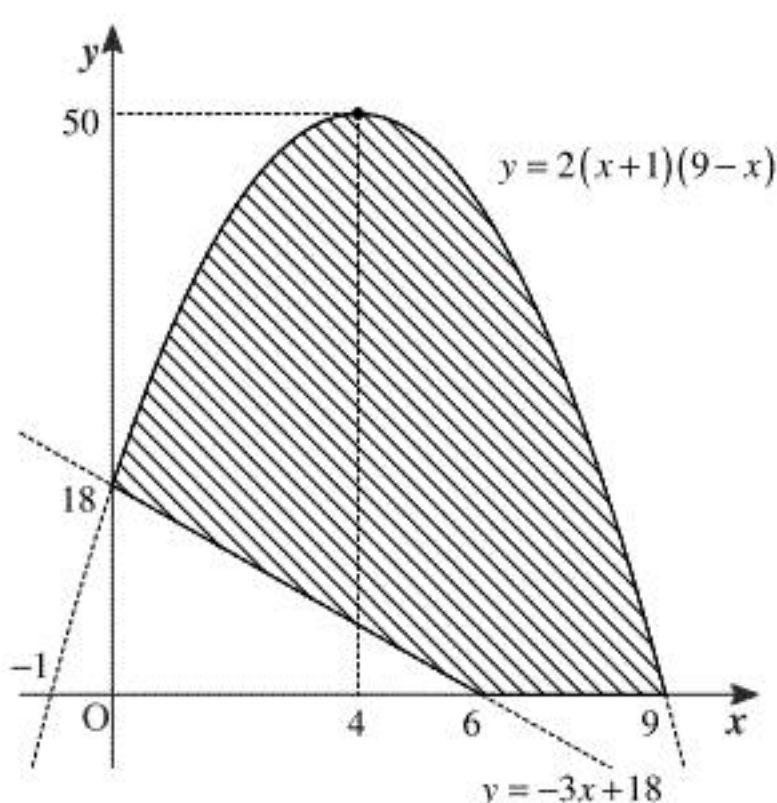
ち、 $(a_n - 1)(a_n^2 - 12) < 0$ となる。したがって題意は示された。

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned}
 2(x+1)(9-x) &= -2x^2 + 16x + 18 \\
 &= -2(x-4)^2 + 50
 \end{aligned}$$

であるから、領域 A は下図の斜線部となる。



したがって、領域 A の面積は、

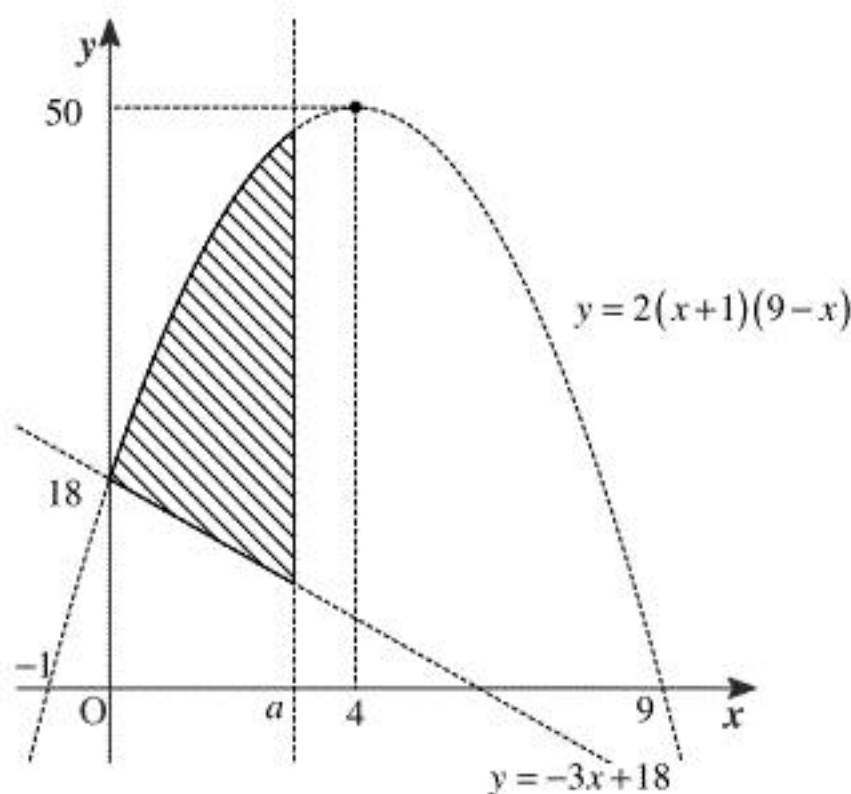
$$\begin{aligned}
 &\int_0^6 \{2(x+1)(9-x) - (-3x+18)\} dx + \int_6^9 2(x+1)(9-x) dx \\
 &= \int_0^9 (-2x^2 + 16x + 18) dx + \int_0^6 (3x - 18) dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x^2 + 18x \right]_0^9 + \left[\frac{3}{2}x^2 - 18x \right]_0^6 \\
 &= \left(-\frac{2}{3} \cdot 9^3 + 8 \cdot 9^2 + 18 \cdot 9 \right) + \left(\frac{3}{2} \cdot 6^2 - 18 \cdot 6 \right) \\
 &= 270
 \end{aligned}$$

となる。

(答) 270

(2)

$0 < a < 6$ より、領域 B を図示すると下図の斜線部となる。



したがって、領域 B の面積は、

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \{2(x+1)(9-x) - (-3x+18)\} dx &= \int_0^a (-2x^2 + 19x) dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 \right]_0^a \\
 &= -\frac{2}{3}a^3 + \frac{19}{2}a^2
 \end{aligned}$$

と表せる。これが領域 A の面積の $\frac{1}{4}$ 倍になるから、

$$\begin{aligned}
 -\frac{2}{3}a^3 + \frac{19}{2}a^2 &= \frac{270}{4} \\
 \Leftrightarrow 4a^3 - 57a^2 + 405 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (a-3)(4a^2 - 45a - 135) &= 0 \\
 \Leftrightarrow a=3, 4a^2 - 45a - 135 &= 0
 \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $f(a) = 4a^2 - 45a - 135$ とおくと、 $f(a)$ は下に凸の放物線であり、 $f(0) = -135$ 、 $f(6) = -261$ であるから、 $f(a)$ は $0 < a < 6$ で常に負である。したがって、 $4a^2 - 45a - 135 = 0$ は $0 < a < 6$ の解を持たないから、求める a の値は 3 となる。

(答) $a=3$

(1)

A(0, 0, 1), P(p, p, 0), Q(q, -q, 0) より,

$$\overline{AP} = (p, p, -1)$$

$$\overline{AQ} = (q, -q, -1)$$

となるから、内積 $\overline{AP} \cdot \overline{AQ}$ に関して、

$$\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = |\overline{AP}| |\overline{AQ}| \cos \angle PAQ$$

$$\Leftrightarrow pq - pq + 1 = |\overline{AP}| |\overline{AQ}| \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow |\overline{AP}| |\overline{AQ}| = 2$$

が成り立つ。したがって、 $\triangle APQ$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\overline{AP}| |\overline{AQ}| \sin \angle PAQ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となり、 p, q の値によらず一定であることが示された。

(証明終)

(答) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)

四面体 OAPQ の体積 V とおく。まず、 V が最大のときの P, Q の座標を求める。

P(p, p, 0), Q(q, -q, 0) より、

$$\begin{aligned} \overline{OP} \cdot \overline{OQ} &= pq - pq \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ となる。したがって、 $\triangle POQ$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\overline{OP}| |\overline{OQ}| &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} p \cdot \sqrt{2} q \\ &= pq \end{aligned}$$

となる。 $\triangle POQ$ が作る平面、すなわち $z=0$ に対して、 $\overline{OA}$ は垂直であるから、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot pq \cdot |\overline{OA}| \\ &= \frac{pq}{3} \end{aligned}$$

である。したがって、 $pq=k$ とおくと、 k が最大となるとき V も最大となる。また、

$p > 0, q > 0$ より、 $q = \frac{k}{p}, k > 0$ である。ここで、 $p^2 = x > 0$ とおくと(1)より、

$$\begin{aligned} |\overline{AP}| |\overline{AQ}| &= 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2p^2+1} \sqrt{2q^2+1} &= 2 \\ \Leftrightarrow (2p^2+1)(2q^2+1) &= 4 \\ \Leftrightarrow (2p^2+1) \left\{ 2 \left(\frac{k}{p} \right)^2 + 1 \right\} &= 4 \left(\because q = \frac{k}{p} \right) \\ \Leftrightarrow (2p^2+1)(2k^2+p^2) &= 4p^2 \\ \Leftrightarrow 2p^4 + (4k^2-3)p^2 + 2k^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + (4k^2-3)x + 2k^2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるから、 $\textcircled{1}$ が正の実数解をもつときの正の実数 k の最大値を求めればよい。

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + (4k^2-3)x + 2k^2 \\ &= 2 \left(x + \frac{4k^2-3}{4} \right)^2 - \frac{(4k^2-3)^2}{8} + 2k^2 \end{aligned}$$

とおき、この軸 $x = -\frac{4k^2-3}{4}$ の値について場合分けを行う。

[1] $-\frac{4k^2-3}{4} \leq 0$ すなわち $k \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

このとき、 $f(x)=0$ が正の実数解をもつ条件は、

$$f(0) < 0$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 < 0$$

であるが、これを満たす k は存在しない。

[2] $-\frac{4k^2-3}{4} > 0$ すなわち $0 < k < \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

このとき、 $f(x)=0$ が正の実数解をもつ条件は、 $f(x)=0$ の判別式を D とすると、

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (4k^2-3)^2 - 16k^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 16k^4 - 40k^2 + 9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (4k^2-1)(4k^2-9) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(k - \frac{1}{2} \right) \left(k + \frac{1}{2} \right) \left(k - \frac{3}{2} \right) \left(k + \frac{3}{2} \right) \geq 0$$

$$\therefore 0 < k \leq \frac{1}{2} \left(\because 0 < k < \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

となる。

以上[1], [2]より、 k の最大値は $\frac{1}{2}$ である。これを $\textcircled{1}$ に代入することで、

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow p^2 &= \frac{1}{2} \left(\because p^2 = x \right) \\ \therefore p &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\because p > 0 \right) \end{aligned}$$

が得られる。また、

$$\begin{aligned} q &= \frac{k}{p} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

である。したがって、 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ となる。次に四面体 OAPQ の内接球

の半径 r を求める。

$$\overline{OA} \cdot \overline{OP} = 0$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OQ} = 0$$

より、 $\triangle OAP$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\overline{OA}| |\overline{OP}| &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であり、同様に $\triangle OAQ$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\overline{OA}| |\overline{OQ}| &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。また(1)より、 $\triangle APQ$ の面積は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、前半部分より $\triangle OPQ$ の面積は $\frac{1}{2}$ である

から、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot r + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot r + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot r + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r \\ \Leftrightarrow \frac{pq}{3} &= \frac{3+\sqrt{3}}{6} r \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} &= \frac{3+\sqrt{3}}{6} r \\ \therefore r &= \frac{1}{3+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

である。

(答) P の座標: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, Q の座標: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, 内接球の半径: $\frac{1}{3+\sqrt{3}}$

(1)

4個の球の取り出し方は同様に確からしい。6面の塗り方の総数は 4^6 通りである。このうちサイコロが3色で塗られ、かつどの隣り合う2つの面も異なる塗り方を考える。このとき、1と6の面、2と5の面、3と4の面がそれぞれ同じ色で、かつ1, 2, 3の面が異なる色で塗られている。したがって、そのような塗り方の場合の数は、1, 2, 3の面に異なる3色を選んで塗る場合の数と等しく、

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める確率は、

$$\frac{24}{4^6} = \frac{3}{512}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{3}{512}$$

(2)

どの隣り合う2つの面も異なる塗り方は、サイコロを3色で塗る場合と4色で塗る場合が考えられる。このうち、サイコロを3色で塗る場合は(1)より24通りである。サイコロを4色で塗るとき、1と6の面、2と5の面、3と4の面のうち2組はその2面が同じ色で塗られ、残りの1組はその2面が異なる色で塗られなければならない。異なる色を塗る面の組として1と6の面を選んだとき、1, 2と5, 3と4, 6の面に異なる4色を選んで塗ればよいから、そのような場合の数は、

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ (通り)}$$

である。異なる色を塗る面の組として残り2つの組を選んだときも同様であるから、4色全てを用いてどの隣り合う2つの面も異なるように塗る塗り方の場合の数は、

$$24 \cdot 3 = 72 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める確率は、

$$\frac{24+72}{4^6} = \frac{3}{128}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{3}{128}$$

(1)

背理法を利用して、「 $x^2 + 4y^2 = 9z^2$ をみたす自然数 x, y, z があれば x と y はいずれも 3 の倍数である」ことを示す。すなわち、 x と y のいずれかは 3 の倍数でないと仮定して矛盾を導く。このとき、 $x^2 + 4y^2 \equiv x^2 + y^2 \pmod{3}$ であるから x が 3 の倍数でないとしても一般性を失わない。したがって、

$$x \equiv \pm 1 \pmod{3}$$

とおける。また、

$$9z^2 \equiv 0 \pmod{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $y \equiv 0 \pmod{3}$ か $y \equiv \pm 1 \pmod{3}$ で場合分けを行う。

[1] $y \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &\equiv (\pm 1)^2 + 4(0)^2 \\ &\equiv 1 \pmod{3} \end{aligned}$$

であり、これと①は $x^2 + 4y^2 = 9z^2$ に矛盾する。

[2] $y \equiv \pm 1 \pmod{3}$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &\equiv (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 \\ &\equiv 2 \pmod{3} \end{aligned}$$

であり、これと①は $x^2 + 4y^2 = 9z^2$ に矛盾する。

以上[1], [2]より、背理法によって、「 $x^2 + 4y^2 = 9z^2$ をみたす自然数 x, y, z があれば x と y はいずれも 3 の倍数である」ことが示された。

(証明終)

また、 $(x, y, z) = (9, 6, 5)$ とすると、

$$\begin{aligned} 9^2 + 4 \cdot 6^2 &= 225 \\ &= 9 \cdot 25 \\ &= 9 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

となり、これは $x^2 + 4y^2 = 9z^2$ を満たす。

(答) $(x, y, z) = (9, 6, 5)$

(2)

まず、背理法を利用して、「 $x^3 + 4y^3 = 9z^3$ をみたす自然数 x, y, z があれば x と y はいずれも 3 の倍数である」ことを示す。すなわち、 x と y はいずれかは 3 の倍数でないと仮定して矛盾を導く。このとき、 $x^3 + 4y^3 \equiv x^3 + y^3 \pmod{3}$ であるから x が 3 の倍数でないとしても一般性を失わない。したがって、

$$\begin{aligned} x &\equiv \pm 1 \pmod{3} \\ \Leftrightarrow x &\equiv \pm 1, \pm 4, \pm 7 \pmod{9} \\ \Leftrightarrow x^3 &\equiv \pm 1, \pm 64, \pm 343 \pmod{9} \\ \Leftrightarrow x^3 &\equiv \pm 1 \pmod{9} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

とおける。また、

$$9z^3 \equiv 0 \pmod{9} \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。ここで、 $y \equiv 0 \pmod{3}$ か $y \equiv \pm 1 \pmod{3}$ で場合分けを行う。

[1] $y \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

このとき、 y は 3 の倍数であるから、 y^3 は 9 の倍数となる。したがって、②より、

$$\begin{aligned} x^3 + 4y^3 &\equiv \pm 1 + 4 \cdot 0 \\ &\equiv \pm 1 \pmod{9} \end{aligned}$$

であり、これと③は $x^3 + 4y^3 = 9z^3$ に矛盾する。

[2] $y \equiv \pm 1 \pmod{3}$ のとき

このとき、 x と同様に、 $y^3 \equiv \pm 1 \pmod{9}$ を得る。したがって、②より、

$$\begin{aligned} x^3 + 4y^3 &\equiv \pm 1 + 4 \cdot (\pm 1) \text{ (複号任意)} \\ &\equiv \pm 3, \pm 5 \pmod{9} \end{aligned}$$

であり、これと③は $x^3 + 4y^3 = 9z^3$ に矛盾する。

以上[1], [2]より、背理法によって、「 $x^3 + 4y^3 = 9z^3$ をみたす自然数 x, y, z があれば x と y はいずれも 3 の倍数である」ことが示された。次に、同様に背理法を利用して、

「 $x^3 + 4y^3 = 9z^3$ をみたす自然数 x, y, z は存在しない」ことを示す。すなわち、 $x^3 + 4y^3 = 9z^3$ をみたす自然数 x, y, z のうち z が最小である組、 $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ が存在すると仮定して矛盾を導く。このとき、上で証明したように、 x_0, y_0 は 3 の倍数であるから、自然数 x_1, y_1 を用いて、

$$\begin{aligned} x_0 &= 3x_1 \\ y_0 &= 3y_1 \end{aligned}$$

と表せる。これを $x^3 + 4y^3 = 9z^3$ に代入すると、

$$\begin{aligned} (3x_1)^3 + 4(3y_1)^3 &= 9z_0^3 \\ \Leftrightarrow 3(x_1^3 + 4y_1^3) &= z_0^3 \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となり、 x_1, y_1 は自然数であるから、 z_0^3 は 3 の倍数となり、 z_0 も 3 の倍数となる。したがって、 z_0 より小さい自然数 z_1 を用いて、

$$z_0 = 3z_1$$

とおける。これを④に代入することで、

$$\begin{aligned} 3(x_1^3 + 4y_1^3) &= (3z_1)^3 \\ \Leftrightarrow x_1^3 + 4y_1^3 &= 9z_1^3 \end{aligned}$$

となり、 $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1)$ も $x^3 + 4y^3 = 9z^3$ を満たす。しかし、 z_1 は z_0 より小さいから、これは z_0 の最小性に矛盾する。したがって、背理法によって、「 $x^3 + 4y^3 = 9z^3$ をみたす自然数 x, y, z は存在しない」ことが示された。

(証明終)