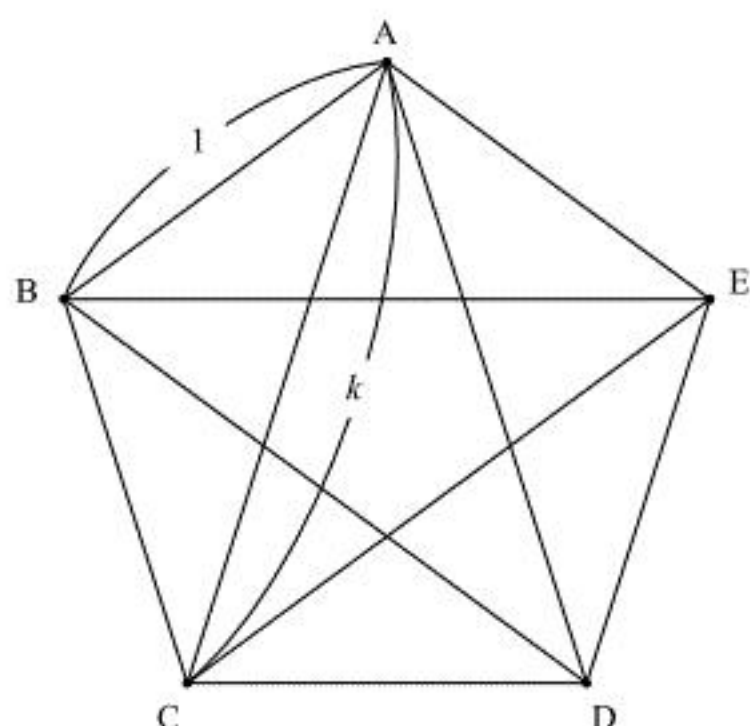




(1)

正五角形の対称性より，AC, CE, EB, BD, DA の長さはすべて k である。また，AB//EC より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC} &= \frac{|\overrightarrow{EC}|}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB} \\ &= k \vec{a}\end{aligned}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} \\ &= k \vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

となる。

(答) $k \vec{a} + \vec{b}$

(2)

$|\overrightarrow{AC}| = k$ であるから，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}| &= k \\ \Leftrightarrow |k \vec{a} + \vec{b}| &= k \\ \Leftrightarrow |k \vec{a} + \vec{b}|^2 &= k^2 \\ \Leftrightarrow k^2 |\vec{a}|^2 + 2k \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= k^2 \\ \Leftrightarrow k^2 + 2k \vec{a} \cdot \vec{b} + 1 &= k^2 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{1}{2k}\end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{1}{2k}$

(3)

$|\overrightarrow{BE}| = k$ であるから，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BE}| &= k \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}| &= k \\ \Leftrightarrow |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= k^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= k^2 \\ \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{k} &= k^2 \left(\because \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2k} \right) \\ \Leftrightarrow k^3 - 2k - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k+1)(k^2 - k - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

となり， $k > 0$ であるから， $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

(答) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(4)

内積の定義より，

$$\begin{aligned}\cos \angle BAE &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= -\frac{1}{2k} \\ &= -\frac{\sqrt{5}-1}{4} \left(\because k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

(1)

$$\begin{aligned} E-A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a^2 & 1-2a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} \Delta(E-A) &= 1 \cdot (1-2a) - (-1)(a^2) \\ &= a^2 - 2a + 1 \\ &= (a-1)^2 \end{aligned}$$

となり、 $a \neq 1$ より $\Delta(E-A) > 0$ であるから、逆行列は確かに存在する。したがって、

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\Delta(E-A)} \begin{pmatrix} 1-2a & 1 \\ -a^2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(a-1)^2} \begin{pmatrix} 1-2a & 1 \\ -a^2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{(a-1)^2} \begin{pmatrix} 1-2a & 1 \\ -a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} (E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^n) &= E+A+A^2+\cdots+A^n - (A+A^2+A^3+\cdots+A^{n+1}) \\ &= E-A^{n+1} \end{aligned}$$

である。この式の両辺に左から B をかけることで、

$$\begin{aligned} B(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^n) &= B(E-A^{n+1}) \\ \Leftrightarrow E(E+A+A^2+\cdots+A^n) &= B(E-A^{n+1}) \quad (\because B(E-A)=E) \\ \Leftrightarrow E+A+A^2+\cdots+A^n &= B(E-A^{n+1}) \end{aligned}$$

が得られ、題意は示された。

(証明終)

(3)

数学的帰納法を利用して、すべての自然数 n について $A^n = \begin{pmatrix} -(n-1)a^n & na^{n-1} \\ -na^{n+1} & (n+1)a^n \end{pmatrix}$ となることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(1-1)a^1 & 1 \cdot a^0 \\ -1 \cdot a^2 & (1+1)a^1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、確かに成立している。

[2] $n=k$ のとき

$$n=k \text{ のとき, } A^k = \begin{pmatrix} -(k-1)a^k & ka^{k-1} \\ -ka^{k+1} & (k+1)a^k \end{pmatrix} \text{ であると仮定する。このとき,}$$

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= AA^k \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(k-1)a^k & ka^{k-1} \\ -ka^{k+1} & (k+1)a^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot \{-(k-1)a^k\} + 1 \cdot (-ka^{k+1}) & 0 \cdot ka^{k-1} + 1 \cdot (k+1)a^k \\ -a^2 \{-(k-1)a^k\} + 2a(-ka^{k+1}) & -a^2 ka^{k-1} + 2a(k+1)a^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(k+1-1)a^{k+1} & (k+1)a^{k+1-1} \\ -(k+1)a^{k+1+1} & (k+1+1)a^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{となり, } n=k+1 \text{ でも } A^n = \begin{pmatrix} -(n-1)a^n & na^{n-1} \\ -na^{n+1} & (n+1)a^n \end{pmatrix} \text{ は成立する。}$$

以上[1], [2]より、すべての自然数 n について $A^n = \begin{pmatrix} -(n-1)a^n & na^{n-1} \\ -na^{n+1} & (n+1)a^n \end{pmatrix}$ となることが示された。

(証明終)

(4)

(2)で示した等式において左辺の第1行第2列成分に注目すると、(3)の結果より

$$0+1+2a+\cdots+na^{n-1} = \sum_{k=1}^n ka^{k-1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が得られる。また右辺の第1行第2列成分にも注目すると

$$B(E-A^{n+1}) = \frac{1}{(a-1)^2} \begin{pmatrix} 1-2a & 1 \\ -a^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+na^{n+1} & -(n+1)a^n \\ (n+1)a^{n+2} & 1-(n+2)a^{n+1} \end{pmatrix}$$

より

$$\frac{1}{(a-1)^2} \{ -(1-2a)(n+1)a^n + 1 - (n+2)a^{n+1} \} \quad \cdots \textcircled{2}$$

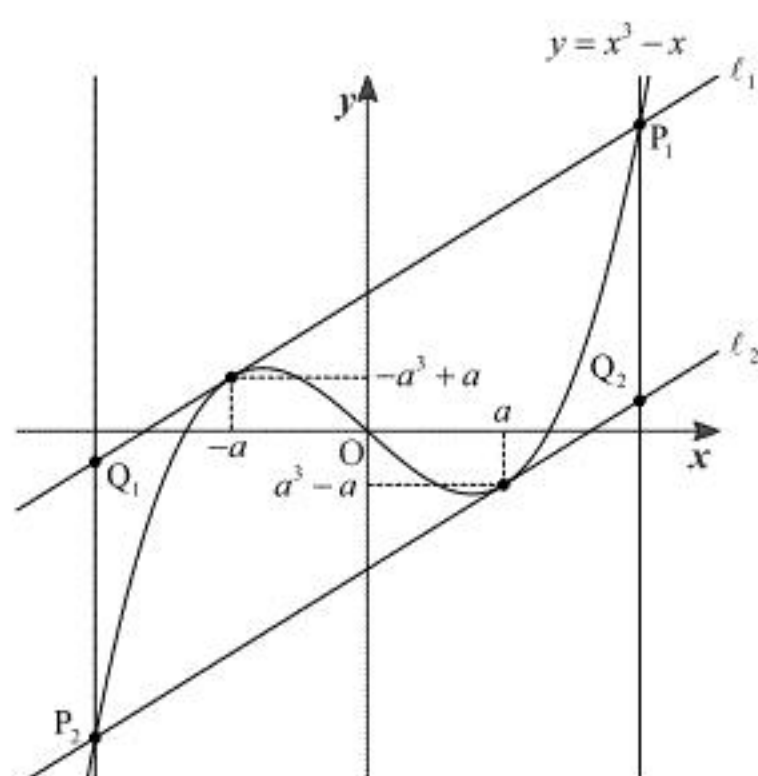
が得られる。以上①②より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n ka^{k-1} &= \frac{1}{(a-1)^2} \{ -(1-2a)(n+1)a^n + 1 - (n+2)a^{n+1} \} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n ka^{k-1} &= \frac{na^{n+1} - (n+1)a^n + 1}{(a-1)^2} \end{aligned}$$

であることが求められた。

$$(\text{答}) \quad \frac{na^{n+1} - (n+1)a^n + 1}{(a-1)^2}$$

(1)



$f(x) = x^3 - x$ とおくと、

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

であるから、 ℓ_1 の方程式は、

$$y - (-a^3 + a) = f'(-a)(x + a)$$

$$\Leftrightarrow y = (3a^2 - 1)x + 2a^3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。同様に、 ℓ_2 の方程式は、

$$y - (a^3 - a) = f'(a)(x - a)$$

$$\Leftrightarrow y = (3a^2 - 1)x - 2a^3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①と $y = x^3 - x$ を連立して解くことで、

$$x^3 - x = (3a^2 - 1)x + 2a^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3a^2x - 2a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + a)^2(x - 2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -a, 2a$$

が得られ、 P_1 の x 座標は $x = 2a$ である。これを①に代入することで、 $P_1(2a, 8a^3 - 2a)$ を得

る。同様に、②と $y = x^3 - x$ を連立して解くことで、

$$x^3 - x = (3a^2 - 1)x - 2a^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = a, -2a$$

が得られ、 P_2 の x 座標は $x = -2a$ である。これを①に代入することで、 $P_2(-2a, -8a^3 + 2a)$ を

得る。 $P_2(-2a, -8a^3 + 2a)$ より、 P_1 を通り y 軸に平行な直線は $x = -2a$ であり、これを①に代

入することで、 $Q_1(-2a, -4a^3 + 2a)$ を得る。同様に、 $P_1(2a, 8a^3 - 2a)$ より、 P_1 を通り y 軸に

平行な直線は $x = 2a$ であり、これを②に代入することで、 $Q_2(2a, 4a^3 - 2a)$ を得る。

$$(\text{答}) P_1(2a, 8a^3 - 2a), P_2(-2a, -8a^3 + 2a), Q_1(-2a, -4a^3 + 2a), Q_2(2a, 4a^3 - 2a)$$

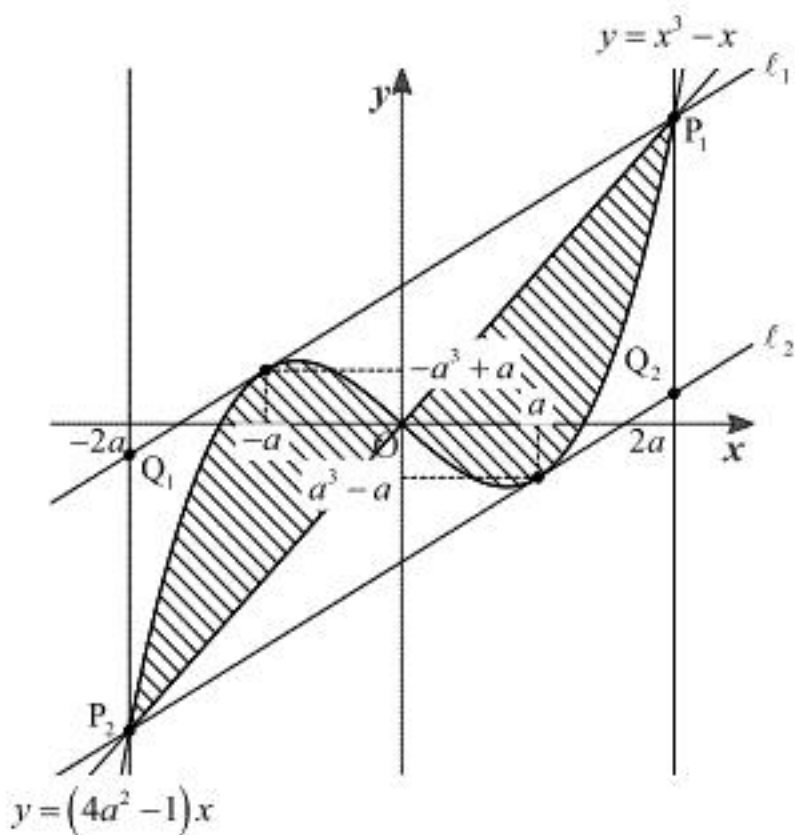
(2)

P_1, P_2 を通る直線の方程式は、

$$y - (8a^3 - 2a) = \frac{8a^3 - 2a - (-8a^3 + 2a)}{2a - (-2a)}(x - 2a)$$

$$\Leftrightarrow y = (4a^2 - 1)x$$

と表せる。したがって、この直線と C で囲まれる部分は下図の斜線部である。



したがって、 S_1 の値は、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{2a} \{(4a^2 - 1)x - (x^3 - x)\} dx + \int_{-2a}^0 \{(x^3 - x) - (4a^2 - 1)x\} dx \\ &= 2 \int_0^{2a} (-x^3 + 4a^2x) dx \\ &= 2 \left[-\frac{x^4}{4} + 2a^2x^2 \right]_0^{2a} \\ &= -8a^4 + 16a^4 \\ &= 8a^4 \end{aligned}$$

である。一方、四角形 $P_1Q_1P_2Q_2$ は平行四辺形であるから、

$$\begin{aligned} S_2 &= \{-4a^3 + 2a - (-8a^3 + 2a)\} \cdot \{2a - (-2a)\} \\ &= 16a^4 \end{aligned}$$

である。したがって、求める値は、

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \frac{8a^4}{16a^4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

4-I

(1)

C の方程式と $y = x^2 + \frac{1}{2}$ から y を消去すると,

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{2} &= -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - a - \frac{1}{2} &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。したがって、 C と放物線 $y = x^2 + \frac{1}{2}$ が共有点を持つ条件は、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (-2a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(a^2 - a - \frac{1}{2}\right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a - 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq a \leq 1 + \sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。このとき、 C と放物線 $y = x^2 + \frac{1}{2}$ の 2 個の共有点の x 座標を $\alpha, \beta (\alpha \leq \beta)$ とおくと、

$$\alpha + \beta = a \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\alpha\beta = \frac{2a^2 - 2a - 1}{4} \quad \cdots \textcircled{4}$$

を得る。また、2 個の共有点の座標は $\left(\alpha, \alpha^2 + \frac{1}{2}\right), \left(\beta, \beta^2 + \frac{1}{2}\right)$ であるから、その中点の座標を (X, Y) とおくと、 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より,

$$\begin{aligned} X &= \frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= \frac{a}{2} \\ Y &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 1}{2} \\ &= \frac{a^2 - \frac{2a^2 - 2a - 1}{2} + 1}{2} \\ &= \frac{a}{2} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

と表せる。これら 2 式から a を消去することで,

$$Y = X + \frac{3}{4}$$

となる。さらに、 $X = \frac{a}{2}$ すなわち $2X = a$ を用いて $\textcircled{2}$ から a を消去すると,

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{2} &\leq 2X \leq 1 + \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{2}}{2} &\leq X \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、 C と放物線 $y = x^2 + \frac{1}{2}$ の 2 個の共有点の中点の座標の軌跡は $y = x + \frac{3}{4}$ の $\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ の部分である。 $y = x + \frac{3}{4}$ は傾き 1 の直線であるから、求める軌跡の長さは,

$$\sqrt{2} \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} - \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \right) = 2$$

である。

(答) 2

(2)

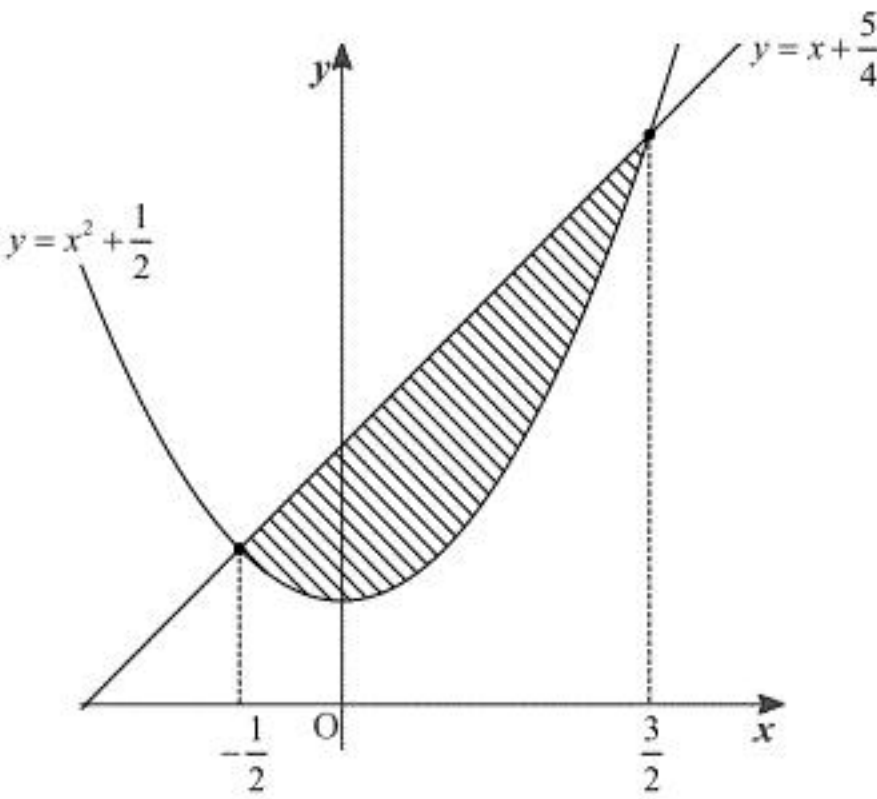
C が (X', Y') を通る条件は、 C の方程式 $y = -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1$ に (X', Y') を代入した a についての方程式

$$\begin{aligned} Y' &= -X'^2 + 2aX' - a^2 + a + 1 \\ \Leftrightarrow a^2 - (2X' + 1)a + X'^2 + Y' - 1 &= 0 \end{aligned}$$

が実数解を持つことである。したがって、この方程式の判別式を D' とすると,

$$\begin{aligned} D' &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (2X' + 1)^2 - 4(X'^2 + Y' - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4X' + 5 &\geq 4Y' \\ \Leftrightarrow X' + \frac{5}{4} &\geq Y' \end{aligned}$$

となる。したがって、 C の通過領域は $y \leq x + \frac{5}{4}$ であり、これと $y \geq x^2 + \frac{1}{2}$ の共通部分を図示すると下図のようになる。



したがって、求める面積は,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left\{ x + \frac{5}{4} - \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \right\} dx &= - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right) dx \\ &= \frac{\left\{ \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\}^3}{6} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

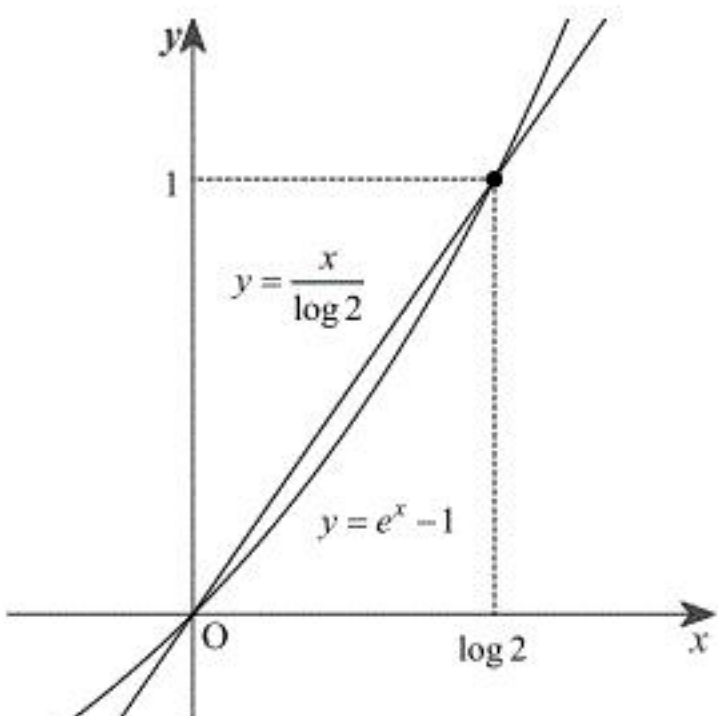
である。

(答) $\frac{4}{3}$

4 - II

(1)

xy 平面上で曲線 $y = e^x - 1$ のグラフは $y = e^x$ のグラフを y 軸方向に -1 平行移動したもので、下に凸である。また、曲線 $y = e^x - 1$ は 2 点 $(0, 0)$, $(\log 2, 1)$ を通り、この 2 点を通る直線の方程式は $y = \frac{x}{\log 2}$ である。したがって、曲線 $y = e^x - 1$ 、直線 $y = \frac{x}{\log 2}$ 、 x 軸の位置関係は下図のようになる。



よって、グラフの上下関係より、 $0 \leq x \leq \log 2$ において $0 \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{\log 2}$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} I_k + I_{k+1} &= \int_0^{\log 2} (e^x - 1)^k dx + \int_0^{\log 2} (e^x - 1)^{k+1} dx \\ &= \int_0^{\log 2} e^x (e^x - 1)^k dx \\ &= \int_0^{\log 2} (e^x - 1)' (e^x - 1)^k dx \\ &= \left[\frac{(e^x - 1)^{k+1}}{k+1} \right]_0^{\log 2} \\ &= \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{k+1}$

(3)

(2)の結果を用いて与式の左辺を変形すると、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} &= (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - (I_3 + I_4) + \cdots + (-1)^n (I_n + I_{n+1}) \\ &= I_0 + (-1)^n I_{n+1} \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

(4)

$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1}$ とおくと、(3)より、

$$S_n = I_0 + (-1)^n I_{n+1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\log 2} (e^x - 1)^0 dx \\ &= \int_0^{\log 2} 1 \cdot dx \\ &= [x]_0^{\log 2} \\ &= \log 2 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。ここで、(1)より、 $0 \leq x \leq \log 2$ において、

$$0 \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{\log 2}$$

であるから、各辺を $n+1$ 乗すると

$$0 \leq (e^x - 1)^{n+1} \leq \frac{x^{n+1}}{(\log 2)^{n+1}}$$

となる。各辺を 0 から $\log 2$ まで積分して

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} 0 \cdot dx &\leq \int_0^{\log 2} (e^x - 1)^{n+1} dx \leq \frac{1}{(\log 2)^{n+1}} \int_0^{\log 2} x^{n+1} dx \\ \Leftrightarrow 0 &\leq I_{n+1} \leq \frac{1}{(\log 2)^{n+1}} \left[\frac{1}{n+2} x^{n+2} \right]_0^{\log 2} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq I_{n+1} \leq \frac{\log 2}{n+2} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{n+2} = 0$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n+1} = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

が得られる。したがって、①、②、③より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ I_0 + (-1)^n I_{n+1} \} \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $\log 2$