

数 学 (120 分)

(平成 26 年度 海洋科学部 前期日程)

注 意 事 項

問 題 冊 子	解 答 用 紙
1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。 2. 問題冊子は全部で 10 ページである。表紙を開くと白紙があり、その裏が 1 ページ目である。不鮮明な印刷、ページの脱落に気付いたときは、試験監督者に申し出ること。 3. 問題冊子は持ち帰ること。	1. すべての解答用紙に受験番号、氏名を記入すること。記入を忘れたとき、あるいは誤った番号を記入したときは失格となることがある。 2. 解答用紙の枚数は、5 枚である。 3. 解答は、指定された箇所に記入すること。なお、解答は答えだけでなく途中の計算も記入すること。

1 次の問に答えよ．(配点：60 点)

- (1) 3 次関数 $f(x) = x^3 - x^2 + 12$ の極値を求め， $y = f(x)$ のグラフをかけ．
(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{12}(a_n^3 - a_n^2 + 12) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき，すべての自然数 n に対して， $1 < a_n < 3$ が成り立つことを示せ．

- (3) $\{a_n\}$ を (2) で定められた数列とするととき，すべての自然数 n に対して， $a_{n+1} < a_n$ が成り立つことを示せ．

注意：以下の余白，および右ページは計算用である．解答は，解答用紙に記入せよ．

- 2 次の不等式①, ②, ③を同時に満たす領域を A , 不等式①, ②, ③, ④を同時に満たす領域を B とする.

$$y \leq 2(x+1)(9-x) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y \geq -3x+18 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$y \geq 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$x \leq a \quad \dots \textcircled{4}$$

ただし, $0 < a < 6$ とする. このとき, 次の問に答えよ. (配点: 50 点)

(1) 領域 A の面積を求めよ.

(2) 領域 B の面積が領域 A の面積の $\frac{1}{4}$ 倍になるときの a の値を求めよ.

注意: 以下の余白, および右ページは計算用である. 解答は, 解答用紙に記入せよ.

3 座標空間内の定点 $A(0, 0, 1)$ と 2 つの点 $P(p, p, 0)$, $Q(q, -q, 0)$ が $\angle PAQ = \frac{\pi}{3}$ をみたしている. ただし, $p > 0, q > 0$ とする. また, 以下において O を座標空間の原点とする. このとき次の問に答えよ. (配点 : 50 点)

- (1) 三角形 APQ の面積は p と q の値によらず一定であることを示し, その面積を求めよ.
- (2) 四面体 $OAPQ$ の体積が最大るとき, 点 P, Q の座標とこの四面体に内接する球の半径を求めよ.

注意 : 以下の余白, および右ページは計算用である. 解答は, 解答用紙に記入せよ.

4 箱の中に赤球，青球，黄球，緑球が各1個ずつ入っている．この箱から球を取り出し，取り出した球の色をサイコロの1の面に塗り，球を箱にもどす．以下，同様の作業を繰り返し，箱から取り出した球の色をサイコロの2から6の各面に順に塗っていく．ただし，サイコロは立方体であり2つの面は辺を共有するとき「隣り合う」という．このとき次の問に答えよ．(配点：50点)

- (1) サイコロが3色で塗られ，かつどの隣り合う2つの面の色も異なる確率を求めよ．
- (2) サイコロのどの隣り合う2つの面の色も異なる確率を求めよ．

注意：以下の余白，および右ページは計算用である．解答は，解答用紙に記入せよ．

5 次の問に答えよ. (配点 : 40 点)

- (1) $x^2 + 4y^2 = 9z^2$ をみたす自然数 x, y, z があれば x と y はいずれも 3 の倍数であることを示し, $x^2 + 4y^2 = 9z^2$ をみたす自然数 x, y, z の例を挙げよ.
- (2) $x^3 + 4y^3 = 9z^3$ をみたす自然数 x, y, z は存在しないことを示せ.

注意 : 以下の余白, および右ページは計算用である. 解答は, 解答用紙に記入せよ.