平成 26 年度

東京海洋大学 海洋工学部

個別学力検査 **数学** 試験問題

1 （配点 25 点）

1 辺の長さが 1 である正五角形 ABCDE において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{b}$ とし，線分 AC の長さを k とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，k を用いて表せ．ただし，線分 AB と線分 EC が平行であることを用いてよい．

(2) 内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を k を用いて表せ．

(3) k の値を求めよ．

(4) $\cos \angle \mathrm{BAE}$ の値を求めよ．

2 （配点 25 点）

$a \fallingdotseq 1$ に対して $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix}$ とする．

(1) $E - A$ の逆行列 B を求めよ．ただし $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(2) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，

$$E + A + A^2 + \cdots + A^n = B(E - A^{n+1})$$

となることを示せ．

(3) $A^n = \begin{pmatrix} -(n-1)a^n & na^{n-1} \\ -na^{n+1} & (n+1)a^n \end{pmatrix}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を数学的帰納法を用いて示せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1}$ を求めよ．

3 （配点 25 点）

座標平面上の曲線 $C\colon y = x^3 - x$ を考える．C 上の点 $(-a, -a^3 + a)$ と $(a, a^3 - a)$ $(a > 0)$ における C の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とする．また，ℓ_1 と C との $(-a, -a^3 + a)$ 以外の共有点を P_1，ℓ_2 と C との $(a, a^3 - a)$ 以外の共有点を P_2 とする．さらに，P_2 を通り y 軸に平行な直線と ℓ_1 の交点を Q_1，P_1 を通り y 軸に平行な直線と ℓ_2 の交点を Q_2 とする．

(1) P_1，P_2，Q_1，Q_2 の座標を求めよ．

(2) 2 点 P_1，P_2 を通る直線と C で囲まれる 2 つの図形の面積の和を S_1，四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$ の面積を S_2 とする．$\dfrac{S_1}{S_2}$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + D$（$D$ は積分定数）を用いてよい．

4 - I （配点 25 点）

座標平面上の放物線 $C : y = -x^2 + 2\,ax - a^2 + a + 1$ を考える．a が実数の範囲を動くとき，以下の問いに答えよ．

(1) C と放物線 $y = x^2 + \dfrac{1}{2}$ との 2 つの共有点を結んだ線分の中点（共有点が 1 つの場合にはその点自身とする）が描く軌跡の長さを求めよ．

(2) $y \geqq x^2 + \dfrac{1}{2}$ の表す領域のうちで C が通過する部分の面積を求めよ．

4 - II （配点 25 点）

$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$I_k = \displaystyle\int_0^{\log 2} (e^x - 1)^k\,dx$ とおく．

(1) $0 \leqq x \leqq \log 2$ のとき，$0 \leqq e^x - 1 \leqq \dfrac{x}{\log 2}$ が成り立つことを示せ．
ただし，$e > 2$ であることを用いてよい．

(2) $I_k + I_{k+1}$ を k を用いて表せ．

(3) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{n+1}=I_0+(-1)^nI_{n+1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}$ を求めよ.