

(1)

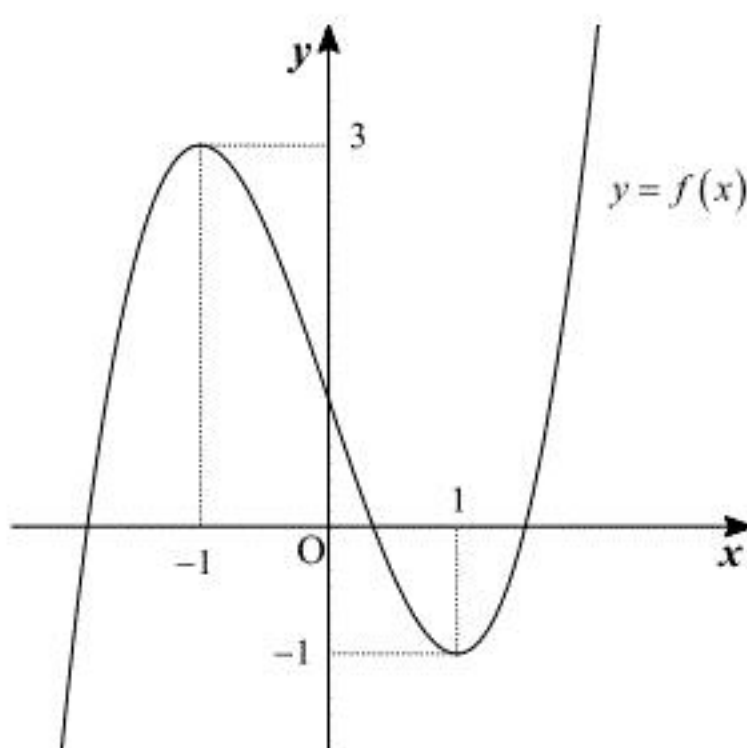
$a=1$ のとき、 $f(x)=x^3-3x+1$ である。関数 $f(x)$ を x について微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

となる。したがって増減表は以下のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f(-1)=3$, $f(1)=-1$ であるから、増減表より $y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



(答) 増減表・・・前表

グラフ・・・前図

(2)

3次関数 $f(x)$ を x について微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3a \\ &= 3(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) \end{aligned}$$

となる。したがって増減表は以下のようになる。

x	...	$-\sqrt{a}$	...	$\sqrt{a}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$0 \leq x \leq 2$ において $f(x) \geq 0$ であるとき、最小値が0以上であればよい。 $\sqrt{a}$ の値によって場合分けを行う。

[1] $\sqrt{a} \leq 2$ であるとき

$\sqrt{a} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4$ ($\because a \geq 0$) である。このとき最小値は $x=\sqrt{a}$ のときであるから

$$\begin{aligned} f(\sqrt{a}) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a - 2a\sqrt{a} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a(1 - 2\sqrt{a}) &\geq 0 \end{aligned}$$

となる。 $a \geq 0$ であるから $1 - 2\sqrt{a} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ となる。これは $0 \leq a \leq 4$ を満たす。

[2] $2 < \sqrt{a}$ であるとき

$2 < \sqrt{a} \Leftrightarrow 4 < a$ である。このとき最小値は $x=2$ のときであるから

$$\begin{aligned} f(2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 8 - 5a &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{8}{5} &\geq a \end{aligned}$$

となるが、これを満たす a は存在しない。

以上[1], [2]より、条件をみたす a の範囲は $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ である。

(答) $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$

(1)

 $k=1$ であるとき(*)は

$$f(x) + \int_1^2 (x-t)f(t)dt = 17x - 28$$

$$\Leftrightarrow f(x) + x \int_1^2 f(t)dt - \int_1^2 tf(t)dt = 17x - 28 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。両辺を x について微分すると、

$$f'(x) + \int_1^2 f(t)dt = 17$$

となる。したがって関数 $f(x)$ は高々1次関数であるから、実数 a, b を用いて $f(x) = ax + b$ と表せる。これを①に代入すると

$$ax + b + x \int_1^2 (at + b)dt - \int_1^2 t(at + b)dt = 17x - 28$$

$$\Leftrightarrow ax + b + x \left[\frac{a}{2}t^2 + bt \right]_1^2 - \left[\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} \right]_1^2 = 17x - 28$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}a + b \right)x + \left(-\frac{7}{3}a - \frac{1}{2}b \right) = 17x - 28$$

となる。上式は恒等式であるから、

$$\begin{cases} \frac{5}{2}a + b = 17 \\ -\frac{7}{3}a - \frac{1}{2}b = -28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}a + b = 17 \\ -\frac{7}{3}a - \frac{1}{2}\left(17 - \frac{5}{2}a\right) = -28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}a + b = 17 \\ \frac{17}{2} + \frac{13}{12}a = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = -28 \end{cases}$$

となる。したがって関数 $f(x)$ は $f(x) = 18x - 28$ となる。

(答) $f(x) = 18x - 28$

(2)

 $k = \frac{30}{17}$ であるとき(*)は

$$f(x) + \int_1^2 \left(x - \frac{30}{17}t \right) f(t)dt = 17x - 28$$

$$\Leftrightarrow f(x) + x \int_1^2 f(t)dt - \frac{30}{17} \int_1^2 tf(t)dt = 17x - 28 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。両辺を x について微分すると、

$$f'(x) + \int_1^2 f(t)dt = 17$$

となる。したがって関数 $f(x)$ は高々1次関数であるから、実数 c, d を用いて $f(x) = cx + d$ と表せる。これを②に代入すると

$$cx + d + x \int_1^2 (ct + d)dt - \frac{30}{17} \int_1^2 t(ct + d)dt = 17x - 28$$

$$\Leftrightarrow cx + d + x \left[\frac{c}{2}t^2 + dt \right]_1^2 - \frac{30}{17} \left[\frac{ct^3}{3} + \frac{dt^2}{2} \right]_1^2 = 17x - 28$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}c + d \right)x + \left(-\frac{70}{17}c - \frac{28}{17}d \right) = 17x - 28$$

となる。上式は恒等式であるから、

$$\begin{cases} \frac{5}{2}c + d = 17 \\ -\frac{70}{17}c - \frac{28}{17}d = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}c + d = 17 \\ 5c + 2d = 34 \end{cases}$$

となる。これより関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= cx + \left(17 - \frac{5}{2}c \right) \\ &= c \left(x - \frac{5}{2} \right) + 17 \end{aligned}$$

となる。したがって $y = f(x)$ のグラフは常に点 $\left(\frac{5}{2}, 17 \right)$ を通る。

(答) $\left(\frac{5}{2}, 17 \right)$

(1)

3つの自然数の積が3の倍数になるとき、3つの自然数のうち少なくとも1つが3の倍数である。余事象を考えると、3つの自然数の積が3の倍数ではないとき、3つの自然数はすべて3の倍数ではない。20個の自然数から3つの自然数を取り出す場合の数は ${}_{20}C_3=1140$ 通りである。1から20までの自然数に3の倍数は6つあるので、積が3の倍数ではない場合の数は、 ${}_{14}C_3=364$ 通りである。したがって求める確率は

$$1 - \frac{364}{1140} = 1 - \frac{91}{285} \\ = \frac{194}{285}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{194}{285}$$

(2)

すべての自然数は3で割った余りが0, 1, 2のいずれかである。3つの自然数の和が3の倍数であるとき、3つの自然数の3で割った余りの組み合わせは

(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2), (0, 1, 2)のいずれかである。

[1] 3で割った余りの組み合わせが(0, 0, 0)のとき

1から20までの自然数に3の倍数は6つあるので、場合の数は ${}_6C_3=20$ 通りである。

[2] 3で割った余りの組み合わせが(1, 1, 1)のとき

1から20までの自然数に3で割って1余る数は7つあるので、場合の数は ${}_7C_3=35$ 通りである。

[3] 3で割った余りの組み合わせが(2, 2, 2)のとき

1から20までの自然数に3で割って2余る数は7つあるので、場合の数は ${}_7C_3=35$ 通りである。

[4] 3で割った余りの組み合わせが(0, 1, 2)のとき

1から20までの自然数に3の倍数は6つ、3で割って1余る数は7つ、3で割って2余る数は7つあるので、場合の数は $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$ 通りである。

以上[1]から[4]より、求める確率は

$$\frac{20+35+35+294}{1140} = \frac{384}{1140} \\ = \frac{32}{95}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{32}{95}$$

(3)

最小公倍数の値で場合分けを行う。

[1] 最小公倍数が1, 2, 3, 5, 7のとき

最小公倍数がこれらの値になる3つの自然数の組み合わせは存在しない。

[2] 最小公倍数が4のとき

3つの自然数の組み合わせは(1, 2, 4)の1通りである。

[3] 最小公倍数が6のとき

3つの自然数の組み合わせは(1, 2, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 6), (2, 3, 6)の4通りである。

[4] 最小公倍数が8のとき

3つの自然数の組み合わせは(1, 2, 8), (1, 4, 8), (2, 4, 8)の3通りである。

[5] 最小公倍数が9のとき

3つの自然数の組み合わせは(1, 3, 9)の1通りである。

[6] 最小公倍数が10のとき

3つの自然数の組み合わせは(1, 2, 5), (1, 2, 10), (1, 5, 10), (2, 5, 10)の4通りである。

以上[1]から[6]より、求める確率は $\frac{1+4+3+1+4}{1140} = \frac{13}{1140}$ である。

$$\text{(答)} \quad \frac{13}{1140}$$

(1)

関数 $x^2(1-x)$ を x について微分すると、 $2x-3x^2$ である。 $x=a_n$ における曲線 C の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (2a_n - 3a_n^2) \cdot (x - a_n) + a_n^2 - a_n^3 \\ &= (2a_n - 3a_n^2)x + 2a_n^3 - a_n^2 \end{aligned}$$

となる。この接線と直線 l の交点の x 座標は $-x = (2a_n - 3a_n^2)x + 2a_n^3 - a_n^2$ の解である。このとき解は

$$\begin{aligned} -x &= (2a_n - 3a_n^2)x + 2a_n^3 - a_n^2 \\ \Leftrightarrow (3a_n^2 - 2a_n - 1)x &= 2a_n^3 - a_n^2 \\ \Leftrightarrow (3a_n + 1) \cdot (a_n - 1)x &= 2a_n^3 - a_n^2 \end{aligned}$$

となる。 $3a_n + 1 = 0 \Leftrightarrow a_n = -\frac{1}{3}$ のとき、 $2a_n^3 - a_n^2 = -\frac{5}{27} \neq 0$ であり、また $a_n - 1 = 0 \Leftrightarrow a_n = 1$ のとき、 $2a_n^3 - a_n^2 = 1 \neq 0$ である。したがって、 $(3a_n + 1)(a_n - 1) \neq 0$ であるから、

$$x = \frac{2a_n^3 - a_n^2}{(3a_n + 1)(a_n - 1)}$$

である。よって $a_{n+1} = \frac{2a_n^3 - a_n^2}{(3a_n + 1)(a_n - 1)}$ である。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = \frac{2a_n^3 - a_n^2}{(3a_n + 1)(a_n - 1)}$$

(2)

$0 < a_{n+1} < a_n^2 < a_n$ を数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1 = \frac{2}{5} \text{ であるから, } a_2 = \frac{2\left(\frac{2}{5}\right)^3 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}{\left(3 \cdot \frac{2}{5} + 1\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - 1\right)} = \frac{4}{165} > 0 \text{ である。} a_1^2 - a_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{165} = \frac{103}{825} > 0$$

であるから、 $0 < a_2 < a_1^2$ である。また、 $a_1 < 1$ であるから $a_2 < a_1^2 < a_1$ である。

[2] $n=k-1$ までのすべての n について $0 < a_{n+1} < a_n^2 < a_n$ が成り立つとき、

$$\begin{aligned} a_k^2 - a_{k+1} &= a_k^2 - \frac{2a_k^3 - a_k^2}{(3a_k + 1) \cdot (a_k - 1)} \\ &= \frac{(3a_k^2 - 2a_k - 1) - (2a_k - 1)}{(3a_k + 1) \cdot (a_k - 1)} a_k^2 \\ &= \frac{(3a_k - 4) \cdot a_k^3}{(3a_k + 1) \cdot (a_k - 1)} \end{aligned}$$

である。 $0 < a_k < a_1 < 1$ であることから、 $3a_k - 4 < 0$ 、 $a_k > 0$ 、 $3a_k + 1 > 0$ 、 $a_k - 1 < 0$ であるため、

$$\begin{aligned} \frac{(3a_k - 4) \cdot a_k^3}{(3a_k + 1) \cdot (a_k - 1)} &> 0 \\ \Leftrightarrow a_k^2 - a_{k+1} &> 0 \\ \Leftrightarrow a_{k+1} &< a_k^2 \end{aligned}$$

である。また、 $0 < a_k < 1$ であることから $a_k^2 < a_k$ である。(1)より、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{2a_k^3 - a_k^2}{(3a_k + 1) \cdot (a_k - 1)} \\ &= \frac{(2a_k - 1)a_k^2}{(3a_k + 1) \cdot (a_k - 1)} \end{aligned}$$

である。 $0 < a_k < a_1 < \frac{1}{2}$ であることから $2a_k - 1 < 0$ 、 $a_k > 0$ 、 $3a_k + 1 > 0$ 、 $a_k - 1 < 0$ である。よって、

$$\frac{(2a_k - 1)a_k^2}{(3a_k + 1) \cdot (a_k - 1)} > 0 \Leftrightarrow a_{k+1} > 0 \text{ である。以上より } 0 < a_{k+1} < a_k^2 < a_k \text{ である。}$$

以上[1], [2]より、自然数 n において $0 < a_{n+1} < a_n^2 < a_n$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(1)

点 P は線分 AB の中点であるから座標は $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{1-3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(\frac{a+2}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$ であり、点 Q は線分 AC の中点であるから座標は $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{1-2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = \left(\frac{a+1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ であり、点 R は線分 CD の中点であるから座標は $\left(\frac{1+1}{2}, \frac{-2-1}{2}, \frac{0-1}{2}\right) = \left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ であり、点 S は線分 BD の中点であるから座標は $\left(\frac{2+1}{2}, \frac{-3-1}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -2, 0\right)$ である。

$$\begin{aligned}\overline{QR} &= \overline{OR} - \overline{OQ} \\ &= \left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{a+1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \\ &= \left(\frac{-a+1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

であるから、線分 QR の長さは

$$\begin{aligned}|\overline{QR}| &= \sqrt{\left(\frac{-a+1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2a + 14}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2a + 14}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overline{QP} &= \left(\frac{a+2}{2}, -1, \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{a+1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned}\overline{QP} \cdot \overline{QR} &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-a+1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-a+1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{a}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overline{QP}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\cos \angle PQR &= \frac{\overline{QP} \cdot \overline{QR}}{|\overline{QP}| |\overline{QR}|} \\ &= \frac{-\frac{a}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - 2a + 14}}{2}} \\ &= \frac{-a\sqrt{3(a^2 - 2a + 14)}}{3(a^2 - 2a + 14)}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \cos \angle PQR = \frac{-a\sqrt{3(a^2 - 2a + 14)}}{3(a^2 - 2a + 14)}$$

(3)

$$\overline{QS} = \left(\frac{3}{2}, -2, 0\right) - \left(\frac{a+1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{-a+2}{2}, -\frac{3}{2}, -1\right) \text{ である。}$$

$$\begin{aligned}\overline{QS} &= \left(\frac{-a+2}{2}, -\frac{3}{2}, -1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-a+1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right) \\ &= \overline{QP} + \overline{QR}\end{aligned}$$

であることから、四角形 PQRS は平行四辺形である。三角形 PQR の面積は

$$\begin{aligned}\Delta PQR &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{QP}|^2 |\overline{QR}|^2 - (\overline{QP} \cdot \overline{QR})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 - 2a + 14}{4} - \left(-\frac{a}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2a^2 - 6a + 42}}{8}\end{aligned}$$

である。したがって四角形 PQRS の面積は $2 \Delta PQR = \frac{\sqrt{2a^2 - 6a + 42}}{4}$ である。

$$\frac{\sqrt{2a^2 - 6a + 42}}{4} = \frac{\sqrt{2\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{75}{2}}}{4}$$

であるから、 a が実数全体を動くとき四角形 PQRS の面積の最小値は $a = \frac{3}{2}$ のとき

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{75}{2}} = \frac{5}{8} \sqrt{6} \text{ である。}$$

$$(\text{答}) \quad a = \frac{3}{2} \text{ のとき } \frac{5}{8} \sqrt{6}$$