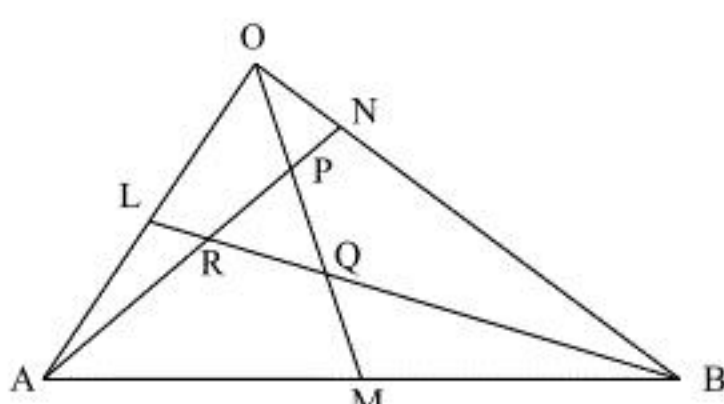


(1)

条件より、点 P, Q, R, N, M, L は以下のようになる。



点 L は線分 OA の中点、点 M は線分 AB の中点であるから、

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\vec{a}, \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

と表される。また、点 P は線分 OM を 1:2 に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OM} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\end{aligned}$$

と表される。点 N は線分 OB 上にあるから、実数 k_1 ($0 \leq k_1 \leq 1$) を用いて $\overrightarrow{ON} = k_1\vec{b}$ と表される。また、点 N は直線 AP 上に存在するため、実数 l_1 を用いて

$$\overrightarrow{ON} = l_1\overrightarrow{OA} + (1-l_1)\overrightarrow{OP}$$

と表される。これを計算して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= l_1\vec{a} + (1-l_1)\left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1+5l_1}{6}\vec{a} + \frac{1-l_1}{6}\vec{b}\end{aligned}$$

である。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから、係数同士を比較して

$$\begin{cases} 0 = \frac{1+5l_1}{6} \\ k_1 = \frac{1-l_1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{1}{5} \\ l_1 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

となる。従って点 N は線分 AP を 6:1 に外分し、線分 OB を 1:4 に内分する点であり、

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{5}\vec{b} \text{ である。}$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}, \overrightarrow{ON} = \frac{1}{5}\vec{b}$$

(2)

点 Q は線分 OM 上に存在するため、実数 k_2 ($0 \leq k_2 \leq 1$) を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= k_2\overrightarrow{OM} \\ &= \frac{k_2}{2}\vec{a} + \frac{k_2}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

と表される。また、点 Q は線分 LB 上に存在するため、実数 l_2 ($0 \leq l_2 \leq 1$) を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= l_2\overrightarrow{OL} + (1-l_2)\vec{b} \\ &= \frac{l_2}{2}\vec{a} + (1-l_2)\vec{b}\end{aligned}$$

と表される。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから、

$$\begin{cases} \frac{k_2}{2} = \frac{l_2}{2} \\ \frac{k_2}{2} = 1-l_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = l_2 \\ \frac{1}{2}l_2 = 1-l_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = \frac{2}{3} \\ l_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

である。したがって点 Q は線分 OM を 2:1 に内分し、線分 LB を 1:2 に内分する点であり、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \text{ である。}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= k_3\overrightarrow{OL} + (1-k_3)\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{k_3}{2}\vec{a} + (1-k_3)\vec{b}\end{aligned}$$

と表される。また、点 R は線分 AN 上に存在するため、実数 l_3 ($0 \leq l_3 \leq 1$) を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= l_3\overrightarrow{OA} + (1-l_3)\overrightarrow{ON} \\ &= l_3\vec{a} + \frac{1-l_3}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

と表される。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから、

$$\begin{cases} \frac{k_3}{2} = l_3 \\ 1-k_3 = \frac{1-l_3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_3 = 2l_3 \\ 5-10l_3 = 1-l_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_3 = \frac{8}{9} \\ l_3 = \frac{4}{9} \end{cases}$$

である。したがって点 R は線分 LB を 1:8 に内分し、線分 AN を 5:4 に内分する点であり、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} \text{ である。}$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}, \overrightarrow{OR} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b}$$

(3)

(2)より、点 Q は線分 LB を 1:2 に内分し、点 R は線分 LB を 1:8 に内分しているので、

$$\overline{BQ} = \frac{2}{3}\overline{BL}, \overline{BR} = \frac{8}{9}\overline{BL} \text{ であるから、} \overline{BQ}:\overline{QR}:\overline{RL} = 6:2:1 \text{ である。}$$

$$(\text{答}) \quad \overline{BQ}:\overline{QR}:\overline{RL} = 6:2:1$$

(4)

点 P は線分 OM を 1:2 に内分し、点 Q は線分 OM を 2:1 に内分する点であるから、

OP:PQ=1:1 である。したがって $\triangle ORQ:\triangle PRQ=2:1$ である。また(2)より、

$$\triangle OLB:\triangle ORQ = \text{LB}:\text{RQ} = 9:2$$

である。また、 $\triangle OAB:\triangle OLB = \text{OA}:\text{OL} = 2:1$ であるから、

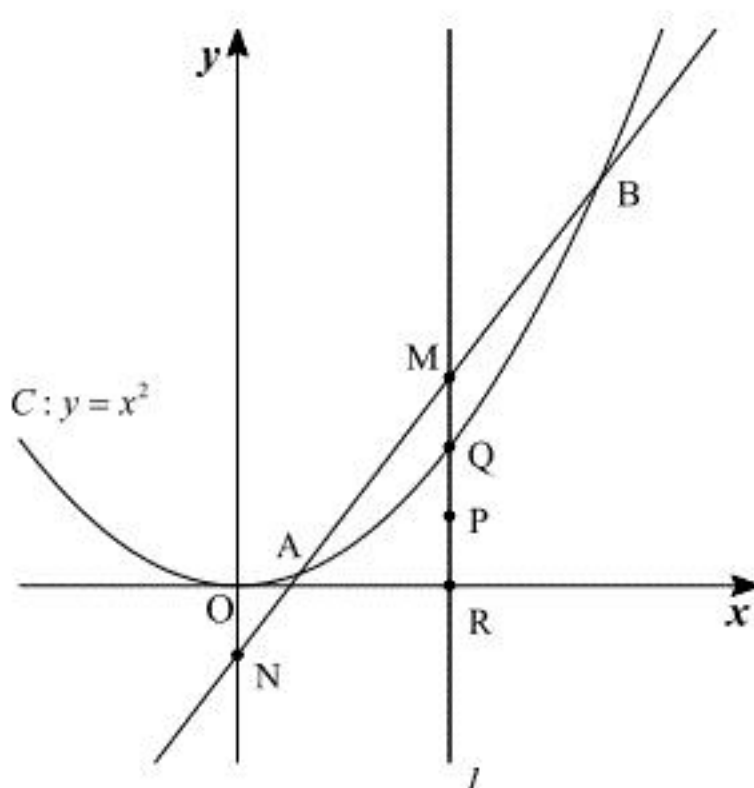
$$\begin{aligned}\frac{S_2}{S_1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{18}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{18}$$

(1)

条件より、グラフは以下のようになる。



点Pの座標は (a, b) であることから、直線 l の方程式は $x = a$ であり、点Rの座標は $(a, 0)$ 、点Qの座標は (a, a^2) 、点Qは線分MPの中点であるから点Mの座標は $(a, 2a^2 - b)$ 、点Nの座標は $(0, -b)$ である。また、直線MNの方程式は実数 p, q を用いて $y = px + q$ と表せる。直線MNは点M, Nを通るため、

$$\begin{cases} -b = q \\ 2a^2 - b = pa - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -b \\ p = 2a \quad (\because a > 0) \end{cases}$$

である。したがって直線MNの方程式は $y = 2ax - b$ である。 y を消去しこの直線と放物線Cの方程式を連立させると

$$\begin{aligned} 2ax - b &= x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2ax + b &= 0 \end{aligned}$$

となり、点Aの x 座標を α 、点Bの x 座標を β とすると、 α, β はこの2次方程式の異なる2実解である。したがって

$$\alpha^2 - 2a\alpha + b = 0, \beta^2 - 2a\beta + b = 0$$

が成り立つ。また、点Aの座標は (α, α^2) 、点Bの座標は (β, β^2) であり、 $(x^2)' = 2x$ であることから、点A, Bにおける接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2\alpha(x - \alpha) + \alpha^2 \Leftrightarrow y = 2\alpha x - \alpha^2 \\ y &= 2\beta(x - \beta) + \beta^2 \Leftrightarrow y = 2\beta x - \beta^2 \end{aligned}$$

である。 $x = a$ のときそれぞれの接線における y 座標は

$$\begin{aligned} 2a\alpha - \alpha^2 &= b \quad (\because \alpha^2 - 2a\alpha + b = 0) \\ 2a\beta - \beta^2 &= b \quad (\because \beta^2 - 2a\beta + b = 0) \end{aligned}$$

であるから、これらの接線は点P (a, b) を通る。したがって直線APおよび直線BPは放物線Cの接線である。

(証明終)

(2)

(1)から解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = 2a, \alpha\beta = b$ である。線分AM、放物線C、直線 l によって囲まれた領域の面積は、 $\int_a^a \{(2ax - b) - x^2\} dx$ であり、線分MB、放物線C、直線 l によって

囲まれた領域の面積は、 $\int_a^\beta \{(2ax - b) - x^2\} dx$ である。このとき

$$\begin{aligned} & \int_a^a \{(2ax - b) - x^2\} dx - \int_a^\beta \{(2ax - b) - x^2\} dx \\ &= \int_a^a (-x^2 + 2ax - b) dx - \int_a^\beta (-x^2 + 2ax - b) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2 - bx \right]_a^a - \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2 - bx \right]_a^\beta \\ &= 2 \left(-\frac{a^3}{3} + a^3 - ab \right) - \left\{ \left(-\frac{1}{3} \right) (\alpha^3 + \beta^3) + a(\alpha^2 + \beta^2) - b(\alpha + \beta) \right\} \\ &= \frac{4}{3}a^3 - 2ab + \frac{1}{3} \{ (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \} - a \{ (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \} + b(\alpha + \beta) \\ &= \frac{4}{3}a^3 - 2ab + \frac{8}{3}a^3 - 2ab - 4a^3 + 2ab + 2ab \quad (\because \alpha + \beta = 2a, \alpha\beta = b) \\ &= 0 \\ &\Leftrightarrow \int_a^a \{(2ax - b) - x^2\} dx = \int_a^\beta \{(2ax - b) - x^2\} dx \end{aligned}$$

となる。したがって放物線Cと線分ABで囲まれる図形の面積は直線 l により二等分されることが示された。

(証明終)

4 - I

(1)

接線 l の方程式を $l: y = ax + b$ (a, b は実数) とする。直線 l と曲線 C の交点の x 座標を α, β (α, β は $\alpha < \beta$ を満たす実数) とすると、 $x^4 - 2x^2 + 2x = ax + b$ となる解は $x = \alpha, \beta$ であり、これらは共に重解である。したがって

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 + 2x - (ax + b) &= (x - \alpha)^2 (x - \beta)^2 \\ \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + (2 - a)x - b &= x^4 - (2\alpha + 2\beta)x^3 + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)x^2 + \{\alpha\beta(2\alpha + 2\beta)\}x + \alpha^2\beta^2 \end{aligned}$$

である。ここで各係数を比較して

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = -2 \\ \alpha\beta(2\alpha + 2\beta) = 2 - a \\ \alpha^2\beta^2 = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ 2\alpha^2 = 2 \\ \alpha\beta(2\alpha + 2\beta) = 2 - a \\ \alpha^2\beta^2 = -b \end{cases}$$

とわかる。したがって $\alpha = -1, \beta = 1$ ($\because \alpha < \beta$) であり、 $a = 2, b = -1$ である。よって接線 l の方程式は $y = 2x - 1$ である。

(答) $y = 2x - 1$

(2)

$x^4 - 2x^2 + 2x - (2x - 1) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{(x^4 - 2x^2 + 2x) - (2x - 1)\} dx &= \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{16}{15} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{16}{15}$

(3)

実数 t において、曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は(1)より

$$y = (4t^3 - 4t + 2)x - 3t^4 + 2t^2$$

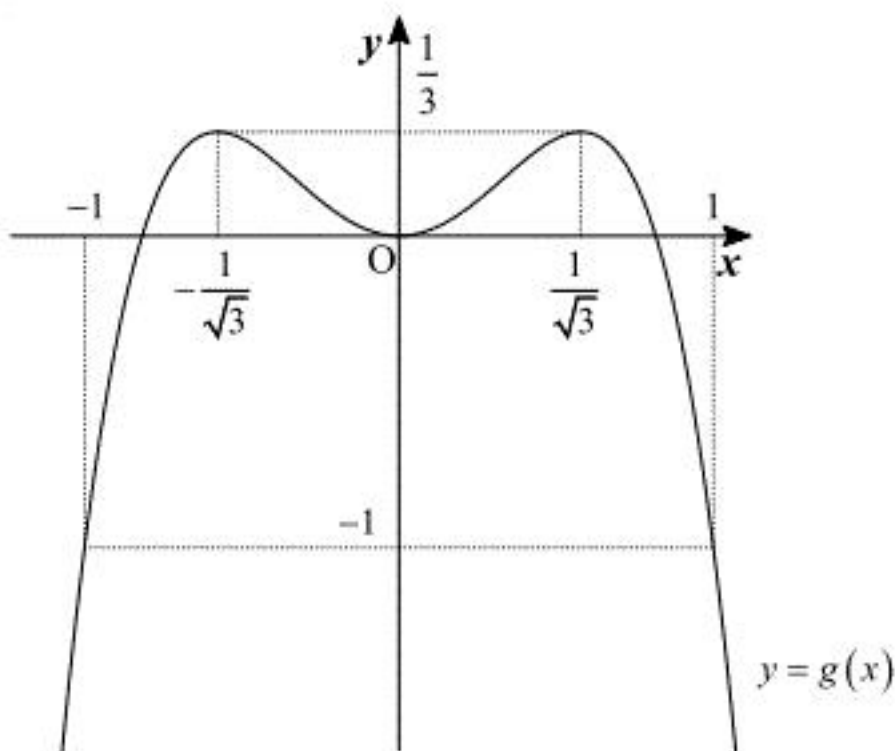
である。この接線が点 $(0, a)$ を通るとき $a = -3t^4 + 2t^2$ を満たし、これを満たす t の解の個数が接線の本数である。 $g(x) = -3x^4 + 2x^2$ とすると、

$$g'(x) = -12x^3 + 4x = -12x \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

より $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

増減表より、 $y = g(x)$ のグラフは以下のように描ける。



(1)より $a = -1$ のとき $t = \pm 1$ であり、同一接線上に2接点が存在する。以上より、点 $(0, a)$ を通

る接線の本数は $\frac{1}{3} < a$ のとき0本、 $a = -1$ のとき1本、 $a < -1, -1 < a < 0, a = \frac{1}{3}$ のとき2本、

$a = 0$ のとき3本、 $0 < a < \frac{1}{3}$ のとき4本である。

(答)	$\frac{1}{3} < a$ のとき	0本
	$a = -1$ のとき	1本
	$a < -1, -1 < a < 0, a = \frac{1}{3}$ のとき	2本
	$a = 0$ のとき	3本
	$0 < a < \frac{1}{3}$ のとき	4本

4 - II

(1)

$f(x) = x + e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ において、 $x = 0$ を代入すると、 $f(0) = 0 + e^0 \int_0^0 e^{-t} f(t) dt = 0$ である。

(答) $f(0) = 0$

(2)

$f(x) = x + e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ の両辺を x について微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt + e^x \cdot e^{-x} f(x) \left(\because \frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t} f(t) dt = e^{-x} f(x) \right) \\ &= 1 + (f(x) - x) + f(x) \left(\because f(x) = x + e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt \right) \\ &= 2f(x) - x + 1 \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

$g(x) = e^{-2x} f(x)$ の両辺を x について微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2e^{-2x} f(x) + e^{-2x} f'(x) \\ &= -2e^{-2x} f(x) + e^{-2x} (2f(x) - x + 1) \\ &= (-x + 1)e^{-2x} \end{aligned}$$

となる。

(答) $g'(x) = (-x + 1)e^{-2x}$

(4)

$g'(x) = (-x + 1)e^{-2x}$ より、 $g'(x)$ を x について積分すると、

$$\begin{aligned} g(x) &= \int (-x + 1)e^{-2x} dx \\ &= -\frac{-x + 1}{2} e^{-2x} - \int -\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x} dx \\ &= \frac{x - 1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + C \\ &= \frac{2x - 1}{4} e^{-2x} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

となる。 $g(x) = e^{-2x} f(x)$ であり、 $e^{-2x} > 0$ であるから両辺 e^{-2x} で割ると $f(x) = \frac{2x - 1}{4} + Ce^{2x}$

を得る。 $f(0) = 0$ より

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} + C &= 0 \\ \therefore C &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。以上より $f(x) = \frac{2x - 1}{4} + \frac{1}{4} e^{2x}$ である。

(答) $f(x) = \frac{2x - 1}{4} + \frac{1}{4} e^{2x}$