平成27年度

東京海洋大学 海洋工学部

個別学力検査 **数学** 試験問題

$\boxed{\mathbf{1}}$ （配点25点）

△OABに対して，辺OAの中点をL，辺ABの中点をM，線分OMを1 : 2に内分する点をPとする．また，直線OBと直線APの交点をN，直線OMと直線BLの交点をQ，直線ANと直線BLの交点をRとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$とおく．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$および$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$および$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(3) 線分の長さの比BQ : QR : RLを求めよ．

(4) △OABの面積をS_1，△PQRの面積をS_2とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ （配点25点）

Oを原点とする座標平面上に放物線$C:\ y = x^2$と点P(a, b)（ただし，$a > 0$かつ$b < a^2$）がある．Pを通りy軸に平行な直線lが，Cおよびx軸と交わる点をそれぞれQ，Rとする．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{QM}}$となるように点Mを，また$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}}$となるように点Nをとる．直線MNが$C$と交わる点を A，B とする．

(1) 直線APおよび直線BPは，それぞれCの接線であることを示せ．

(2) Cと線分ABで囲まれる図形の面積は，lにより二等分されることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ （配点25点）

座標平面上の曲線 K を $y = x^3 - x + 1$ とする．

(1) 点 $(t, t^3 - t + 1)$ における K の接線の方程式を t を用いて表せ．

(2) 点 $(1, 5)$ を通る直線 l が K と接するとき，接点の座標を求めよ．

(3) 直線 l と K で囲まれた図形の面積を求めよ．

ただし，$\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$ （C は積分定数）を用いてよい．

$\boxed{\text{4-I}}$, $\boxed{\text{4-II}}$ **どちらかを選択**

$\boxed{\textbf{4 - I}}$ （配点 25 点）

座標平面上に曲線 C： $y = x^4 - 2x^2 + 2x$ がある．直線 l は C に異なる 2 点で接している．このとき以下の問いに答えよ．ただし $(x^4)' = 4x^3$ および $\displaystyle\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + D$（$D$ は積分定数）となることを用いてよい．

(1) l の方程式を求めよ．

(2) C と l で囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) 実数 a に対して，点 $(0, a)$ を通る C の接線の本数を求めよ．

$\boxed{\textbf{4 - II}}$ （配点 25 点）

関数 $f(x)$ はすべての実数 x について

$$f(x) = x + e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$$

を満たす．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．

(2) $f'(x) = 2f(x) - x + 1$ が成り立つことを示せ．

(3) $g(x) = e^{-2x} f(x)$ とする．$g'(x)$ を求めよ．

(4) $f(x)$ を求めよ．