

(1)

与式より $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

となり、 $f'(x) = 0$ となる x の値は $x = 0, 2$ である。よって、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	(極大)	$\searrow$	(極小)	$\nearrow$

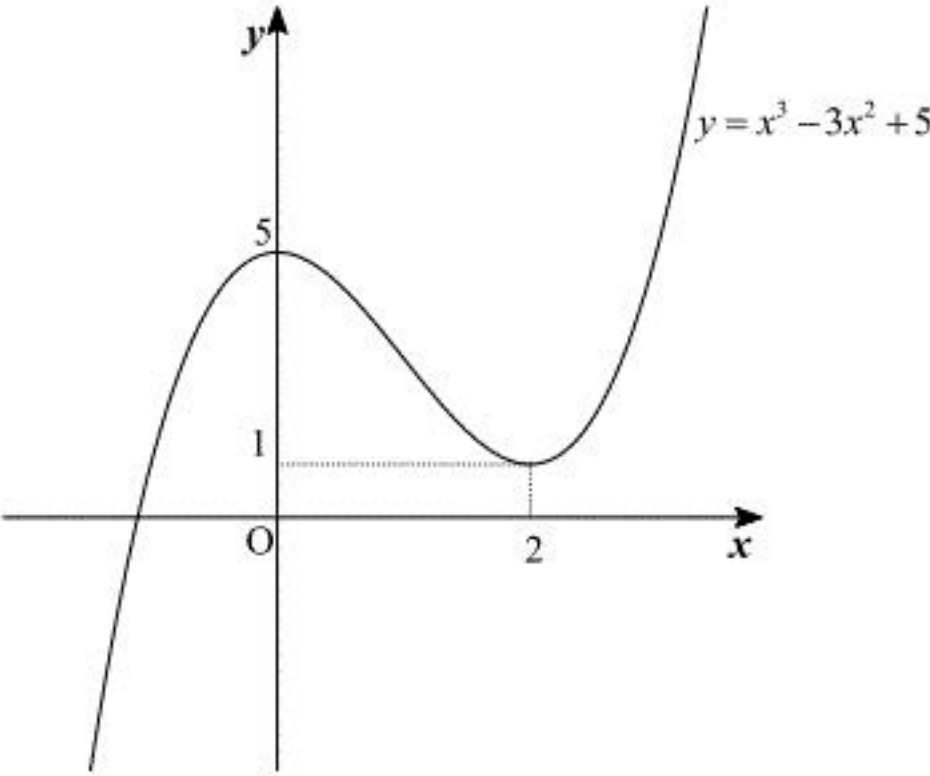
増減表より $f(x)$ は $x = 0$ で極大値、 $x = 2$ で極小値をとる。したがって、極大値は

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

となり、極小値は

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 \\ &= 8 - 12 + 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。またこの値と増減表をもとに $y = f(x)$ のグラフを描くと下図のようになる。



(答) 極大値:5, 極小値:1, $y = f(x)$ のグラフは前図

(2)

「点 P を通る直線が点 Q で $y = f(x)$ に接する」を言い換えると「点 Q における $y = f(x)$ の接線が点 P を通る」となる。ここで、点 $Q(q, f(q))$ における $y = f(x)$ の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - f(q) &= f'(q)(x - q) \\ \Leftrightarrow y &= f'(q)(x - q) + f(q) \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、この接線が点 $P(p, f(p))$ を通ることから、 $\textcircled{1}$ に $(x, y) = (p, f(p))$ を代入して q について解くと、

$$\begin{aligned} f(p) - f(q) &= f'(q)(p - q) \\ \Leftrightarrow f(q) - f(p) &= f'(q)(q - p) \\ \Leftrightarrow (q^3 - 3q^2 + 5) - (p^3 - 3p^2 + 5) &= (3q^2 - 6q)(q - p) \\ \Leftrightarrow q^3 - p^3 - 3(q^2 - p^2) - (3q^2 - 6q)(q - p) &= 0 \\ \Leftrightarrow (q - p)(q^2 + qp + p^2) - 3(q + p)(q - p) - (3q^2 - 6q)(q - p) &= 0 \\ \Leftrightarrow (q - p)\{(q^2 + qp + p^2) - 3(q + p) - (3q^2 - 6q)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (q - p)\{-2q^2 + (p + 3)q + p(p - 3)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow -(q - p)(q - p)(2q + p - 3) &= 0 \\ \therefore q &= p, -\frac{1}{2}p + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで題意より点 P と点 Q は異なるから $p \neq q$ である。よって、適するのは

$$q = -\frac{1}{2}p + \frac{3}{2} \text{ のみである。}$$

(答) $q = -\frac{1}{2}p + \frac{3}{2}$

(1)

まず $x^2 + y^2 = 1$ と $y = 6x^2 - 4$ の交点を求める。

$$\begin{aligned} y &= 6x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{6}y + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

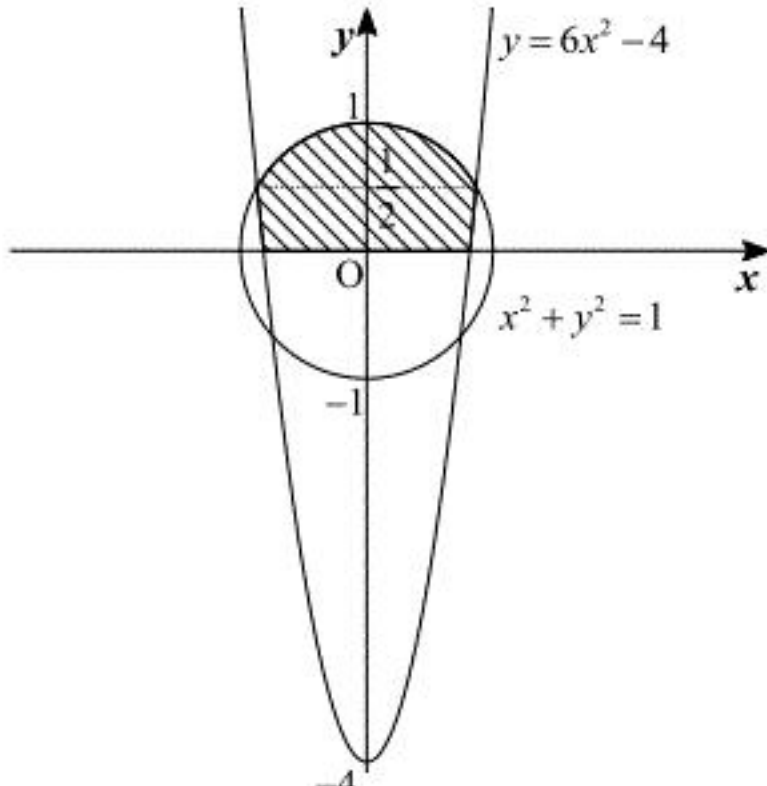
と変形できるから、これを $x^2 + y^2 = 1$ に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}y + \frac{2}{3} + y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow y^2 + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow 6y^2 + y - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2y-1)(3y+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}, -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。これらの値を $x^2 = \frac{1}{6}y + \frac{2}{3}$ にそれぞれ代入すると $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$ が得られる。よって、

$x^2 + y^2 = 1$ と $y = 6x^2 - 4$ の交点の座標は $(x, y) = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\pm \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ である。これから

$x^2 + y^2 = 1$ と $y = 6x^2 - 4$ のグラフの位置関係が分かり、それを踏まえて領域 D を図示すると下図の斜線部になる。ただし境界線を含む。



(答) 前図

(2)

$y - x = k$ とおくと $y - x$ の最大、最小は k の最大、最小と一致する。また $y - x = k \Leftrightarrow y = x + k$ であるから、「点 (x, y) が領域 D を動くときの k のとりうる値の範囲」は「直線 $y = x + k$ と領域 D が交点を持つような k の範囲」と言い換えることができる。よって、 k は $y = x + k$ の y 切片であるから、直線 $y = x + k$ と領域 D が交点を持つときの $y = x + k$ の y 切片の最大、最小について考えればよい。それぞれの場合について考える。

[1] k が最大となるとき

(1)の図より k が最大になる候補は、 $y = x + k$ が $y \geq 0$ で $x^2 + y^2 = 1$ に接するときである。

このとき、2式を連立した2次方程式

$$\begin{aligned} x^2 + (x+k)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2kx + k^2 - 1 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

は重解を持つ。この2次方程式の判別式を A とすると、判別式が0になることより、

$$\begin{aligned} \frac{A}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 2(k^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow k^2 &= 2 \\ \therefore k &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。 $k = \sqrt{2}$ のとき、①の重解は $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ となり、 $y = x + k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ となるから、確かに

これは $y \geq 0$ における接点である。また、この点 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ は $6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4 = -1$ より

$y \geq 6x^2 - 4$ を満たすことが分かり、確かに領域 D 上の点である。 $\sqrt{2} > -\sqrt{2}$ であるから、以上より k の最大値は $k = \sqrt{2}$ である。

[2] k が最小となるとき

まず $y = 6x^2 - 4$ と x 軸の交点を求めると

$$\begin{aligned} 6x^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{2}{3} \\ \therefore x &= \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

より $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$ となる。よって、(1)の図より k が最小になるのは

$y = x + k$ が点 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$ を通るときである。したがって、このときの k の値は

$$\begin{aligned} k &= y - x \\ &= 0 - \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

となることから、 k の最小値は $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ である。

以上[1], [2]より $y - x$ の最大値は $\sqrt{2}$ 、最小値は $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と求められる。

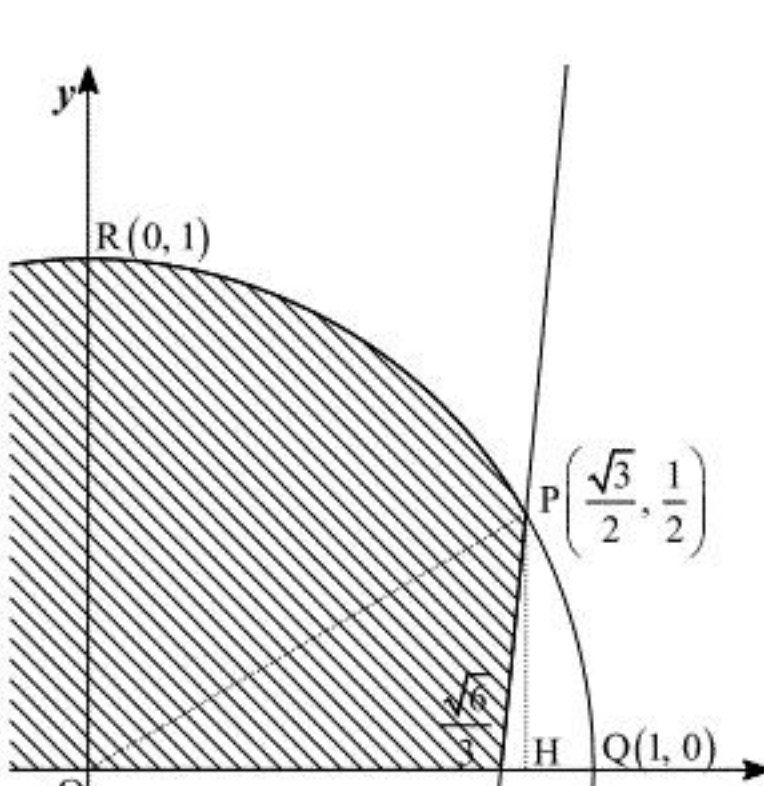
(答) 最大値: $\sqrt{2}$ 、最小値: $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

(3)

領域 D は y 軸に対して対称であるから $x \geq 0$ の部分だけを考える。(1), (2)より $y = 6x^2 - 4$ と

x 軸、 $x^2 + y^2 = 1$ との $y \geq 0$ における交点はそれぞれ $\left(\pm \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$ と $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ であるから、

$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Q(1, 0)$, $R(0, 1)$ とすると、領域 D の $x \geq 0$ の部分は下図のようになる。



$\angle POQ = 30^\circ$ であるから $\angle POR = 60^\circ$ となる。ここで P から x 軸におろした垂線の足を H とし、 x 軸と線分 PH 、 $y = 6x^2 - 4$ で囲まれた部分を E とすると、領域 D の面積は扇形 POR の面積と $\triangle POH$ の面積を足したものから領域 E の面積を引くと求めることができる。まず領域 E の面積を求めると

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (6x^2 - 4) dx &= \left[2x^3 - 4x \right]_{\frac{\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left\{ 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right)^3 - 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \right\} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} - 2\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{6}}{9} + \frac{4\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{8\sqrt{6}}{9} - \frac{5\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

となる。次に扇形 POR の面積と $\triangle POH$ の面積はそれぞれ

$$\begin{aligned} \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{6} &= \frac{1}{6}\pi \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

となるから、今は $x \geq 0$ の部分のみを考えていることも踏まえると領域 D の面積は

$$\begin{aligned} 2 \left\{ \frac{1}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{8} - \left(\frac{8\sqrt{6}}{9} - \frac{5\sqrt{3}}{4} \right) \right\} &= 2 \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{8\sqrt{6}}{9} + \frac{11\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \frac{1}{3}\pi + \frac{11\sqrt{3}}{4} - \frac{16\sqrt{6}}{9} \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\frac{1}{3}\pi + \frac{11\sqrt{3}}{4} - \frac{16\sqrt{6}}{9}$

(1)

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ であるから、 $2016^n > 10^{100}$ の両辺の常用対数をとると

$$n \log_{10} 2016 > 100$$

$$\Leftrightarrow n \log_{10} 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 > 100$$

$$\Leftrightarrow n(5 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 + \log_{10} 7) > 100$$

となる。これに与えられた数値を代入すると

$$n(5 \times 0.301 + 2 \times 0.477 + 0.845) > 100$$

$$\Leftrightarrow 3.304 \times n > 100$$

となる。 $3.304 \times 30 = 99.12 < 100$, $3.304 \times 31 = 102.424 > 100$ であるから、求める最小の自然数 n は $n = 31$ である。

(答) $n = 31$

(2)

まず $\sum_{k=0}^n 225^k$ を計算する。これは初項1 公比 225 の等比数列の項を第1項から第 $n+1$ 項まで足

したものだと考えてよいから、その値は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 225^k &= \frac{225^{n+1} - 1}{225 - 1} \\ &= \frac{225^{n+1} - 1}{224} \end{aligned}$$

となる。よって与式は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 225^k &> 10^{100} \\ \Leftrightarrow \frac{225^{n+1} - 1}{224} &> 10^{100} \\ \Leftrightarrow 225^{n+1} - 1 &> 224 \cdot 10^{100} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで 225^{n+1} の1の位は5であるのに対して、 $224 \cdot 10^{100}$ の1の位は0である。よって $225^{n+1} = 224 \cdot 10^{100}$ を満たす自然数 n は存在せず、 $225^{n+1} - 1 > 224 \cdot 10^{100}$ を満たす最小の n と $225^{n+1} > 224 \cdot 10^{100}$ を満たす最小の n は等しい。したがって、

$$225^{n+1} > 224 \cdot 10^{100} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす最小の n を求めればよい。①の両辺の常用対数をとると

$$\begin{aligned} 225^{n+1} &> 224 \cdot 10^{100} \\ \Leftrightarrow (n+1) \log_{10} 225 &> \log_{10} 224 + 100 \\ \Leftrightarrow (n+1) \log_{10} 3^2 \cdot 5^2 &> \log_{10} 2^5 \cdot 7 + 100 \\ \Leftrightarrow (n+1)(2 \log_{10} 3 + 2 \log_{10} 5) &> 5 \log_{10} 2 + \log_{10} 7 + 100 \end{aligned}$$

となるから、これに与えられた数値を代入すると

$$\begin{aligned} (n+1)(2 \times 0.477 + 2 \times 0.699) &> 5 \times 0.301 + 0.845 + 100 \\ \Leftrightarrow 2.352(n+1) &> 102.35 \end{aligned}$$

が得られる。 $2.352 \times (42+1) = 101.136 < 102.35$, $2.352 \times (43+1) = 103.488 > 102.35$ であるから、求める最小の n は $n = 43$ である。

(答) $n = 43$

(1)

まず

「 $\vec{p} = \vec{0}$ ならば $\triangle ABC$ は正三角形である」 $\cdots \star$ を示す。題意より $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$ であるから

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \vec{c} = -\vec{a} - \vec{b} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。ここで仮定より

$$\vec{p} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{c} + |\vec{c}|\vec{a} = \vec{0}$$

となるのでこれに①を代入すると

$$|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{c} + |\vec{c}|\vec{a} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|(-\vec{a} - \vec{b}) + |\vec{c}|\vec{a} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (|\vec{c}| - |\vec{b}|)\vec{a} + (|\vec{a}| - |\vec{b}|)\vec{b} = \vec{0}$$

が得られる。 $\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立であることを踏まえると、この式より

$$\begin{cases} |\vec{c}| - |\vec{b}| = 0 & \cdots \textcircled{2} \\ |\vec{a}| - |\vec{b}| = 0 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。②, ③より $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$, すなわち $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}|$ となるから, $\star$ が成り立つことが示せた。

次に,

「 $\triangle ABC$ が正三角形ならば $\vec{p} = \vec{0}$ である」 $\cdots \star$ を示す。 $\triangle ABC$ が正三角形のとき $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ であるから与式より

$$\begin{aligned} \vec{p} &= |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{c} + |\vec{c}|\vec{a} \\ &= |\vec{a}|(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \end{aligned}$$

となる。この式に①を代入すると

$$\vec{p} = |\vec{a}|(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = |\vec{a}|\{\vec{a} + \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b})\}$$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = \vec{0}$$

となるから $\star$ が成り立つことが示せた。

以上より

「 $\vec{p} = \vec{0} \Leftrightarrow \triangle ABC$ が正三角形」が示せたから, $\vec{p} = \vec{0}$ は $\triangle ABC$ が正三角形であるための必要十分条件である。

(証明終)

(2)

 $\vec{p} = |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{c} + |\vec{c}|\vec{a}$ に①を代入すると

$$\vec{p} = |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{c} + |\vec{c}|\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|(-\vec{a} - \vec{b}) + |\vec{c}|\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = (|\vec{c}| - |\vec{b}|)\vec{a} + (|\vec{a}| - |\vec{b}|)\vec{b}$$

となる。また題意より $\vec{p} = \vec{a}$ であるから, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が一次独立であることを踏まえると

$$\begin{cases} |\vec{c}| - |\vec{b}| = 1 \\ |\vec{a}| - |\vec{b}| = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。これらを整理すると

$$\begin{cases} |\vec{c}| = |\vec{b}| + 1 & \cdots \textcircled{4} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| & \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

が得られる。ここで題意より $|\vec{p}| = |\vec{a}| = 4$ であるから, ④, ⑤より $|\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 5$ となる。よって

 $\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle ABC &= \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{CA}|^2}{2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|} \\ &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} \\ &= \frac{4^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 4} \\ &= \frac{32 - 25}{32} \\ &= \frac{7}{32} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\cos \angle ABC = \frac{7}{32}$

(1)

$P(t, t), Q(t-1, 1-t)$ であるから直線 PQ の方程式は

$$\begin{aligned} y-t &= \frac{t-(1-t)}{t-(t-1)}(x-t) \\ \Leftrightarrow y &= (2t-1)(x-t)+t \\ \Leftrightarrow y &= (2t-1)x-2t^2+2t \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。よって線分 PQ は①の

$$t-1 \leq x \leq t \quad \cdots \textcircled{2}$$

の部分である。また①の右边を t について整理すると

$$\begin{aligned} y &= (2t-1)x-2t^2+2t \\ \Leftrightarrow y &= -2t^2+2(1+x)t-x \\ \Leftrightarrow y &= -2\left(t-\frac{1+x}{2}\right)^2-x+2\left(\frac{1+x}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow y &= -2\left(t-\frac{1+x}{2}\right)^2+\frac{x^2+1}{2} \end{aligned}$$

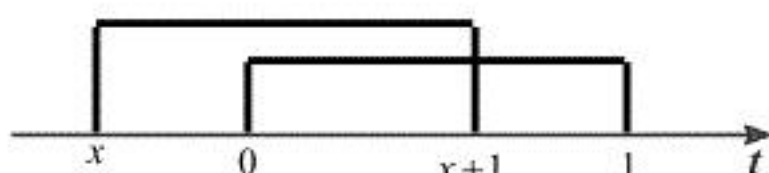
となる。ここで x を固定したときの y のとり得る値の範囲を考える。②より t の範囲は $x \leq t \leq x+1$ であり、題意より t は $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くから x の値に注目して場合分けをして考える。

[1] $x < -1$ のとき

$0 \leq t \leq 1$ かつ $x \leq t \leq x+1$ を満たす t は存在しない。よって y のとれる値も存在しない。

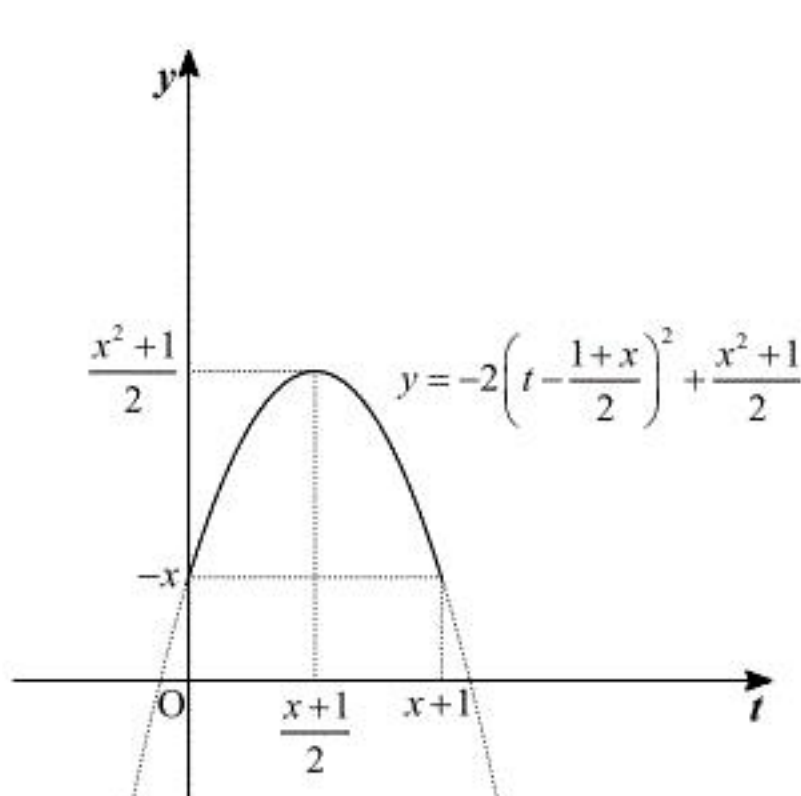
[2] $-1 \leq x < 0$ のとき

$0 \leq t \leq 1$ と $x \leq t \leq x+1$ を数直線上に示すと以下ようになる。



よって上図の数直線より t の範囲は $0 \leq t \leq x+1$ となる。このとき

$y = -2\left(t - \frac{1+x}{2}\right)^2 + \frac{x^2+1}{2}$ のグラフは下図のようになる。



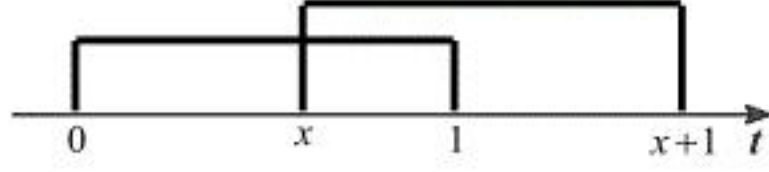
よって図より $y = -2\left(t - \frac{1+x}{2}\right)^2 + \frac{x^2+1}{2}$ は $x=0, x+1$ で最小値

$$\begin{aligned} y &= -2\left(0 - \frac{1+x}{2}\right)^2 + \frac{x^2+1}{2} \\ &= \frac{x^2+1-(x+1)^2}{2} \\ &= \frac{-2x}{2} \\ &= -x \end{aligned}$$

をとり、 $x = \frac{1+x}{2}$ で最大値 $y = \frac{x^2+1}{2}$ をとる。

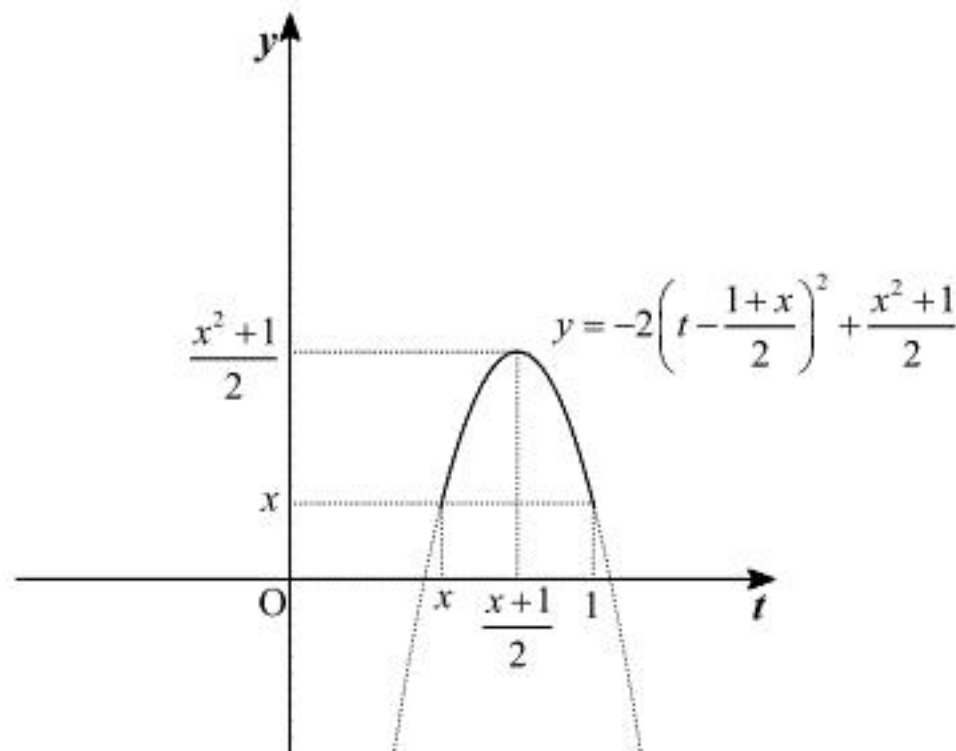
[3] $0 \leq x \leq 1$ のとき

$0 \leq t \leq 1$ と $x \leq t \leq x+1$ を数直線上に示すと以下ようになる。



よって上図の数直線より t の範囲は $x \leq t \leq 1$ となる。このとき

$y = -2\left(t - \frac{1+x}{2}\right)^2 + \frac{x^2+1}{2}$ のグラフは下図のようになる。



よって図より $y = -2\left(t - \frac{1+x}{2}\right)^2 + \frac{x^2+1}{2}$ は $t=x, 1$ で最小値

$$\begin{aligned} y &= -2\left(x - \frac{x+1}{2}\right)^2 + \frac{x^2+1}{2} \\ &= -2\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{x^2+1}{2} \\ &= \frac{x^2+1-(x-1)^2}{2} \\ &= \frac{2x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

をとり、 $t = \frac{x+1}{2}$ で最大値 $y = \frac{x^2+1}{2}$ をとる。

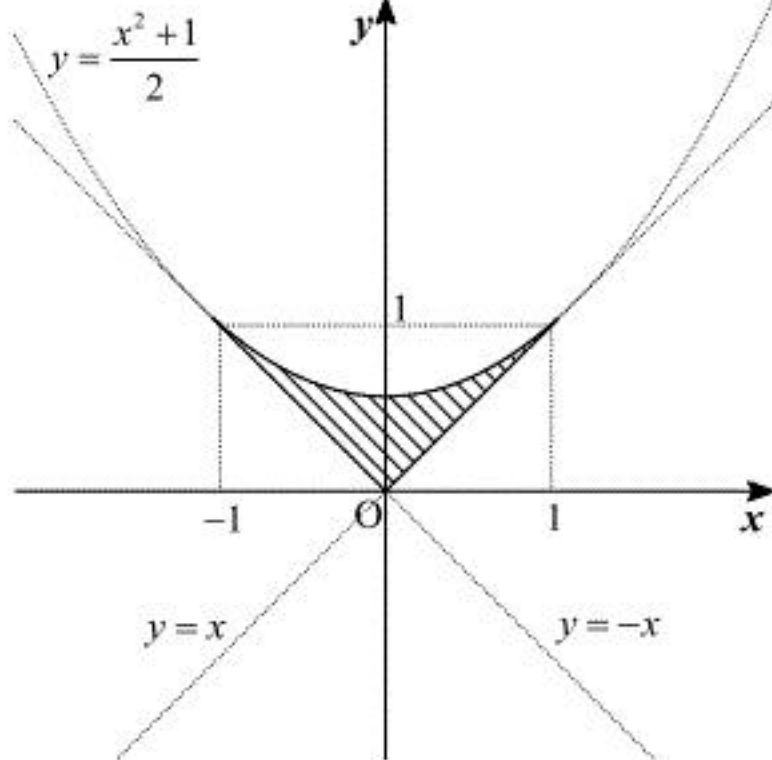
[4] $1 < x$ のとき

$0 \leq t \leq 1$ かつ $x \leq t \leq x+1$ を満たす t は存在しない。よって y のとれる値も存在しない。

以上[1]~[4]より x を固定したときの y のとり得る値の範囲は、

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{なし} & (x < -1, 1 < x) \\ -x \leq y \leq \frac{x^2+1}{2} & (-1 \leq x < 0) \\ x \leq y \leq \frac{x^2+1}{2} & (0 \leq x \leq 1) \end{array} \right.$$

となる。また $y = -x$ は $x = -1$ で、 $y = x$ は $x = 1$ でそれぞれ $y = \frac{x^2+1}{2}$ に接しているから、これらをもとに D を図示すると下図の斜線部になる。ただし、境界線を含む。



(答) 前図

(2)

(1)の図より D の面積は

$$\int_{-1}^0 \left\{ \frac{x^2+1}{2} - (-x) \right\} dx + \int_0^1 \left\{ \frac{x^2+1}{2} - x \right\} dx$$

と表されるのでこれを計算すると

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \left\{ \frac{x^2+1}{2} - (-x) \right\} dx + \int_0^1 \left\{ \frac{x^2+1}{2} - x \right\} dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (x+1)^3 \right]_{-1}^0 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (x-1)^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + \frac{1}{2} \left\{ 0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\frac{1}{3}$