

(1)

与式より,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3b_n & \dots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

であるから, $\textcircled{1} + \sqrt{3} \times \textcircled{2}$ より,

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \sqrt{3}b_{n+1} &= (2a_n + 3b_n) + \sqrt{3}(a_n + 2b_n) \\ &= (2 + \sqrt{3})a_n + \sqrt{3}(2 + \sqrt{3})b_n \\ &= (2 + \sqrt{3})(a_n + \sqrt{3}b_n) \end{aligned}$$

となる。よって, 数列 $\{a_n + \sqrt{3}b_n\}$ は初項が $a_1 + \sqrt{3}b_1$, 公比が $2 + \sqrt{3}$ の等比数列である。題意より, $a_1 = 2, b_1 = 1$ であるから数列 $\{a_n + \sqrt{3}b_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n + \sqrt{3}b_n &= (2 + \sqrt{3})^{n-1} (a_1 + \sqrt{3}b_1) \\ &= (2 + \sqrt{3})^{n-1} (2 + \sqrt{3}) \\ &= (2 + \sqrt{3})^n \end{aligned}$$

となる。また, $\textcircled{1} - \sqrt{3} \times \textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \sqrt{3}b_{n+1} &= (2a_n + 3b_n) - \sqrt{3}(a_n + 2b_n) \\ &= (2 - \sqrt{3})a_n - \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})b_n \\ &= (2 - \sqrt{3})(a_n - \sqrt{3}b_n) \end{aligned}$$

となる。よって, 数列 $\{a_n - \sqrt{3}b_n\}$ は初項が $a_1 - \sqrt{3}b_1$, 公比が $2 - \sqrt{3}$ の等比数列である。したがって, $a_1 = 2, b_1 = 1$ であることを踏まえると数列 $\{a_n - \sqrt{3}b_n\}$ の一般項は,

$$\begin{aligned} a_n - \sqrt{3}b_n &= (2 - \sqrt{3})^{n-1} (a_1 - \sqrt{3}b_1) \\ &= (2 - \sqrt{3})^{n-1} (2 - \sqrt{3}) \\ &= (2 - \sqrt{3})^n \end{aligned}$$

となる。以上より題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)より

$$\begin{cases} a_n + \sqrt{3}b_n = (2 + \sqrt{3})^n & \dots \textcircled{3} \\ a_n - \sqrt{3}b_n = (2 - \sqrt{3})^n & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

であるから, $\textcircled{3} + \textcircled{4}$ より

$$\begin{aligned} 2a_n &= (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n}{2} \end{aligned}$$

が得られ, $\textcircled{3} - \textcircled{4}$ より

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}b_n &= (2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

が得られる。よって, 求める $\frac{b_n}{a_n}$ は

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{a_n} &= \frac{\frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}}{\frac{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n}{2}} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{\sqrt{3}\{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n\}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{b_n}{a_n} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{\sqrt{3}\{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n\}}$$

(3)

(2)より $\frac{b_n}{a_n} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{\sqrt{3}\{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n\}}$ であるから, $n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned} |e_n| &= \left| \frac{\sqrt{3}b_n}{a_n} - 1 \right| \\ &= \left| \sqrt{3} \cdot \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{\sqrt{3}\{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n\}} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{1 - \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^n}{1 + \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^n} - 1 \right| \\ &= \frac{2\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^n}{1 + \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^n} \left(\because 2 - \sqrt{3} > 0 \right) \\ &< 2\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^n \left(\because 1 + \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^n > 1 \right) \\ &\leq 2\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^3 \left(\because \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} < 1 \right) \end{aligned}$$

と変形できる。題意より $0.071 < \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} < 0.072 < 1$ であるから,

$$\begin{aligned} |e_n| &< 2 \cdot 0.072^3 \\ &= 0.000746496 \\ &< 0.001 \end{aligned}$$

となる。よって, 以上より, $n \geq 3$ ならば,

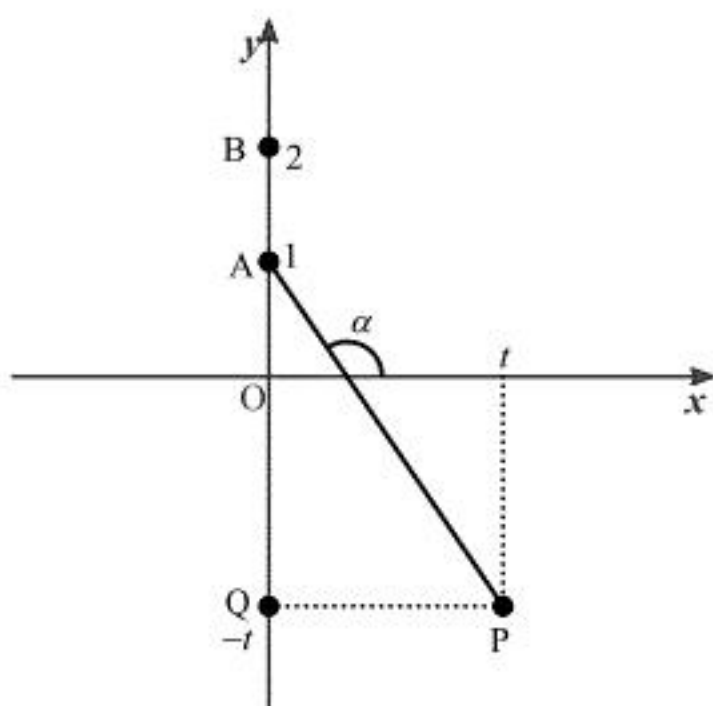
$$|e_n| < 0.001$$

となり, 題意は示された。

(証明終)

(1)

4点A, B, P, Qの位置関係は下図のようにになっている。



まず、直線APの傾きを求めると

$$\frac{-t-1}{t-0} = -\frac{t+1}{t}$$

であるから、直線APとx軸の正の向きがなす角を α ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) とすると $\tan \alpha = -\frac{t+1}{t}$

である。上図より、 $\angle APQ = 180^\circ - \alpha$ であるから

$$\begin{aligned}\tan \angle APQ &= \tan(180^\circ - \alpha) \\ &= -\tan \alpha \\ &= \frac{t+1}{t}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \angle APQ = \frac{t+1}{t}$$

(2)

(1)と同様にして $\tan \angle BPQ$ を求める。直線BPの傾きが

$$\frac{-t-2}{t-0} = -\frac{t+2}{t}$$

となるから $\tan \angle BPQ = \frac{t+2}{t}$ となる。よって、 $\theta = \angle BPQ - \angle APQ$ であるから、

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan(\angle BPQ - \angle APQ) \\ &= \frac{\tan \angle BPQ - \tan \angle APQ}{1 + \tan \angle BPQ \cdot \tan \angle APQ} \\ &= \frac{\frac{t+2}{t} - \frac{t+1}{t}}{1 + \frac{t+2}{t} \cdot \frac{t+1}{t}} \\ &= \frac{\frac{1}{t}}{1 + \frac{(t+1)(t+2)}{t^2}} \\ &= \frac{t}{t^2 + (t+1)(t+2)} \\ &= \frac{t}{2t^2 + 3t + 2}\end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = \frac{t}{2t^2 + 3t + 2}$$

(3)

(2)より、 $\tan \theta = \frac{t}{2t^2 + 3t + 2}$ であるから、 $\frac{1}{\tan \theta}$ は

$$\frac{1}{\tan \theta} = \frac{2t^2 + 3t + 2}{t} = 2t + \frac{2}{t} + 3$$

となる。 $t > 0$ であるから、 $2t, \frac{2}{t}$ はともに正である。したがって、相加相乗平均の関係より、

$$2t + \frac{2}{t} \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{2}{t}} = 4$$

である。等号が成立するのは、 $t > 0$ より、

$$\begin{aligned}2t &= \frac{2}{t} \\ \therefore t &= 1\end{aligned}$$

のときである。したがって、

$$\frac{1}{\tan \theta} \geq 4 + 3 = 7$$

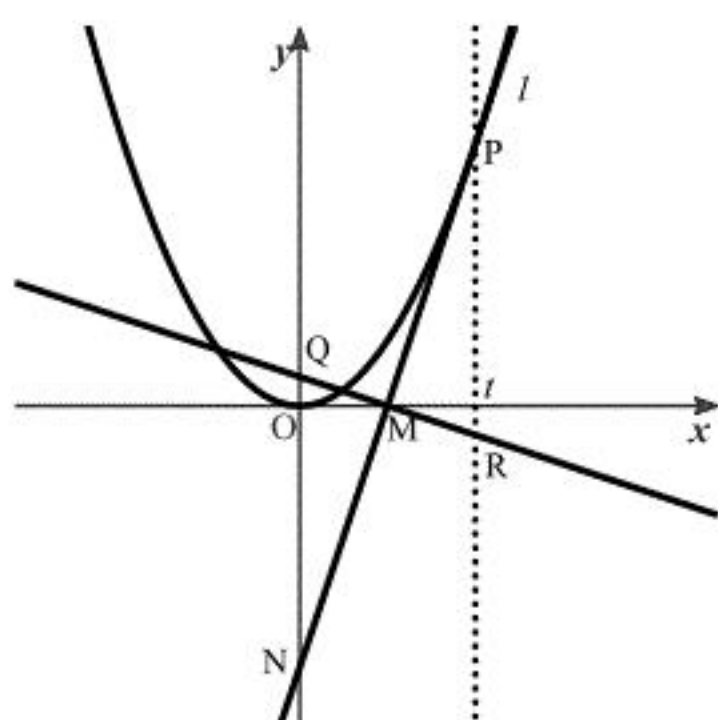
の等号が成り立つので、 $\frac{1}{\tan \theta}$ は $t = 1$ で最小値7をとる。これより、 $\tan \theta$ は $t = 1$ で最大値 $\frac{1}{7}$ を

とることが分かる。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta \text{ の最大値: } \frac{1}{7}, \text{ そのときの } t \text{ の値: } t = 1$$

(1)

各点の位置関係を図示すると下図のようになる。



まず、接線 l の方程式を求める。 $C: y = x^2$ について $\frac{dy}{dx} = 2x$ であるから、

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = 2tx - t^2$$

となる。よって、この式に $x = 0, y = 0$ をそれぞれ代入すると、M, N の座標が

$M\left(\frac{1}{2}t, 0\right), N(0, -t^2)$ であると分かる。また、M を通り l に直交する直線を m とすると、 l の

傾きが $2t$ であるから m の傾きは $-\frac{1}{2t}$ となる ($\because t \neq 0$)。よって、 m の方程式は、

$$y - 0 = -\frac{1}{2t}\left(x - \frac{1}{2}t\right)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{4}$$

となる。よって、この式に $x = 0, x = t$ をそれぞれ代入すると、Q, R の座標が

$Q\left(0, \frac{1}{4}\right), R\left(t, -\frac{1}{4}\right)$ であることが分かる。ここで、線分 QR の中点の座標は、 $\left(\frac{t}{2}, 0\right)$ であるか

ら、点 M に一致する。したがって、点 $P(t, t^2)$ を通る直線 l は、線分 QR を垂直に二等分する

ことが分かり、 $PQ = PR$ であることが言える。以上より、 $\triangle PQR$ は $PQ = PR$ の二等辺三角形であることが分かるので、 $\angle QPR$ は l によって二等分されることが示された。

(証明終)

(2)

線分 PR, 線分 QR の長さをそれぞれ求めると、

$$PR = \sqrt{(t-t)^2 + \left\{-\frac{1}{4} - t^2\right\}^2} = t^2 + \frac{1}{4}$$

$$QR = \sqrt{(0-t)^2 + \left\{\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right\}^2} = \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}$$

となる。(1)で述べたように $PQ = PR$ が成立しているから、 $\triangle PQR$ が正三角形になるのは、

$$PR = QR$$

$$\Leftrightarrow t^2 + \frac{1}{4} = \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} = 1 \left(\because \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow t^2 + \frac{1}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\because t > 0 \right)$$

のときである。

(答) $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)

まず、 S_1 について考える。線分 QN の長さを求めると、

$$QN = \frac{1}{4} - (-t^2) = t^2 + \frac{1}{4}$$

であるから $QN = PR$ となる。また、線分 QN と線分 PR は平行であるから、四角形 PQNR は平行四辺形であることが分かる。よって、線分 QN を底辺としてみると高さは t となるので四角形 PQNR の面積 S_1 は

$$S_1 = QN \cdot t = \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)t$$

である。次に、 S_2 について考える。直線 PQ の傾きは

$$\frac{t^2 - \frac{1}{4}}{t - 0} = \frac{4t^2 - 1}{4t}$$

であるから直線 PQ の方程式は

$$y - t^2 = \frac{4t^2 - 1}{4t}(x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4t^2 - 1}{4t}x + \frac{1}{4}$$

となる。よって、 S_2 は、

$$S_2 = \int_0^t \left\{ \left(\frac{4t^2 - 1}{4t}x + \frac{1}{4} \right) - x^2 \right\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{4t^2 - 1}{8t}x^2 + \frac{1}{4}x \right]_0^t$$

$$= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{t}{8}(4t^2 - 1) + \frac{1}{4}t$$

$$= t \left(\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{8} \right)$$

となる。(2)のとき $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、求める $\frac{S_2}{S_1}$ の値は

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{t \left(\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{8} \right)}{t \left(t^2 + \frac{1}{4} \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{8}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

と求められる。

(答) $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{4}$