平成 28 年度

東京海洋大学 海洋工学部

個別学力検査 **数学** 試験問題

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を以下で定める.

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1$$
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $n = 1, 2, 3, \cdots$ について,

$$a_n + \sqrt{3}\,b_n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n$$
$$a_n - \sqrt{3}\,b_n = \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\dfrac{b_n}{a_n}$ を n を用いて表せ.

(3) 数列 $\{e_n\}$ を

$$e_n = \frac{\sqrt{3}\ b_n}{a_n} - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定めるとき，$n \geqq 3$ ならば

$$|e_n| < 0.001$$

であることを示せ．ただし，$0.071 < \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} < 0.072$ を用いてもよい.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上に 4 点 A$(0, 1)$，B$(0, 2)$，P$(t, -t)$，Q$(0, -t)$（ただし，$t > 0$）をとる．$\angle\mathrm{APB} = \theta$ とおく.

(1) $\tan\angle\mathrm{APQ}$ を t を用いて表せ.

(2) $\tan\theta$ を t を用いて表せ.

(3) $\dfrac{1}{\tan\theta}$ を考えることにより，$\tan\theta$ の最大値とそのときの t の値を求めよ.

$\boxed{3}$ 座標平面上に放物線 C： $y=x^2$ がある．点 $\mathrm{P}(t,t^2)$（ただし，$t>0$）における C の接線を l とし，l が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ M，N とする．M を通り l と直交する直線が，y 軸，直線 $x=t$ と交わる点をそれぞれ Q，R とする．

(1) $\angle\mathrm{QPR}$ は l により二等分されることを示せ．

(2) $\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形になるような t の値を求めよ．

(3) 四角形 PQNR の面積を S_1 とし，線分 PQ，y 軸および C で囲まれる図形の面積を S_2 とする．(2) のとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ．

$\boxed{\text{4-I}}$，$\boxed{\text{4-II}}$ どちらかを選択

$\boxed{\text{4-I}}$ 座標平面上に曲線 C_1： $y=x^3-x$ と，C_1 を x 軸方向に t（ただし，$t>0$）だけ平行移動させた曲線 C_2 がある．C_1 と C_2 は 2 つの共有点を持つという．

(1) t の範囲を求めよ．

(2) C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積 S を t を用いて表せ．

(3) S の最大値とそのときの t の値を求めよ．

$\boxed{\text{4-II}}$ $f(x)=\sqrt{x}\,e^{-\frac{x}{2}}$（ただし，$x>0$）に対し，座標平面上の曲線 C：$y=f(x)$ を考える．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 C，2 直線 $x=t$，$x=t+1$（ただし，$t>0$）および x 軸で囲まれる図形を，x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積 V を t を用いて表せ．

(3) V の最大値を求めよ．