

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2x - 1 \\ &= (3x-1)(x+1) \end{aligned}$$

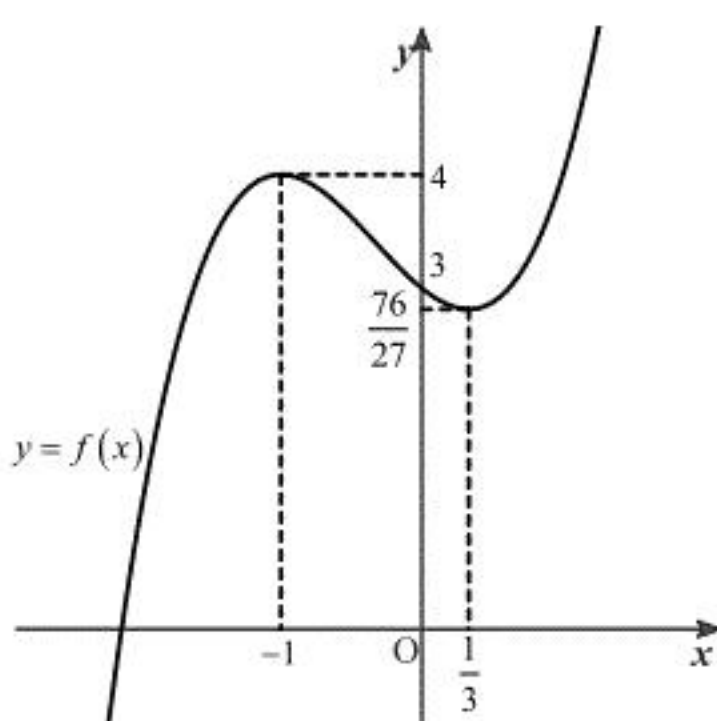
であるから、 $f'(x)=0$  となるとき、 $x=-1, \frac{1}{3}$  となる。 $f(-1)=4, f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{76}{27}$  より、 $y=f(x)$

の増減表は以下のようになる。

|         |            |    |            |                 |            |
|---------|------------|----|------------|-----------------|------------|
| $x$     | ...        | -1 | ...        | $\frac{1}{3}$   | ...        |
| $f'(x)$ | +          | 0  | -          | 0               | +          |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | 4  | $\searrow$ | $\frac{76}{27}$ | $\nearrow$ |

増減表より、 $x=-1$  のとき、極大値 4、 $x=\frac{1}{3}$  のとき、極小値  $\frac{76}{27}$  をとる。したがって、

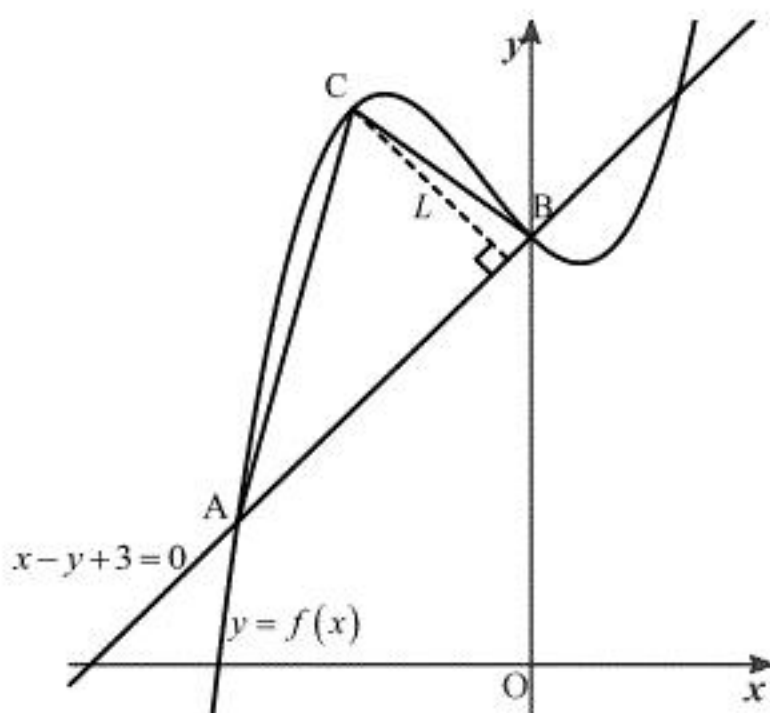
$y=f(x)$  のグラフは下図のようになる。



(答) 極値:  $\begin{cases} x=-1 \text{ のとき 極大値 } 4 \\ x=\frac{1}{3} \text{ のとき 極小値 } \frac{76}{27} \end{cases}$   
 グラフ：前図

(2)

$f(-2)=1, f(0)=3$  より、3点 A, B, C はいずれも  $y=f(x)$  のグラフ上の点である。2点 A, B を通る直線の方程式は  $x-y+3=0$  であるから、点 C と直線 AB の距離が最大となるとき、三角形 ABC の面積も最大である。点 C と直線 AB の距離を  $L$  とおくと、 $y=f(x)$  のグラフと直線は下図のようになる。



ここで  $-2 < p < 0$  より、点 C は直線 AB の上方にあるので  $f(p) > p+3 \Leftrightarrow p-f(p)+3 < 0$  となる。よって、点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned} L &= \frac{|p-f(p)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \\ &= -\frac{p-f(p)+3}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{-p+(p^3+p^2-p+3)-3}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{p^3+p^2-2p}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $g(p)=p^3+p^2-2p$  とおくと、

$$g'(p)=3p^2+2p-2$$

となるので、 $g'(p)=0$  のとき  $p=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$  である。 $2<\sqrt{7}<3$  より、

$$\begin{cases} (-2<)-\frac{4}{3}<\frac{-1-\sqrt{7}}{3}<-1(<0) \\ (0<)\frac{1}{3}<\frac{-1+\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

となることに注意すると、 $-2 < p < 0$  における  $g(p)$  の増減表は以下のようになる。

|         |      |            |                         |            |     |
|---------|------|------------|-------------------------|------------|-----|
| $p$     | (-2) | ...        | $\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$ | ...        | (0) |
| $g'(p)$ |      | +          | 0                       | -          |     |
| $g(p)$  | (0)  | $\nearrow$ |                         | $\searrow$ | (0) |

増減表より、 $p=\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$  のとき  $g(p)$  は最大となるから、 $L=\frac{g(p)}{\sqrt{2}}$  は最大となる。したがって、

$S(p)$  が最大となるときの  $p$  の値は  $p=\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$  である。

(答)  $p=\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$

(1)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \log_3 (\sin \theta \cos \theta) \\ &= \log_3 \frac{\sin 2\theta}{2} \\ &= \log_3 (\sin 2\theta) - \log_3 2 \end{aligned}$$

である。底は  $3(>1)$  であるから、 $\sin 2\theta$  が最大となるとき  $f(\theta)$  も最大となる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  す

なわち  $0 < 2\theta < \pi$  において  $2\theta = \frac{\pi}{2}$  つまり  $\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき  $\sin 2\theta$  は最大値となる。このとき、

$$L = \log_3 1 - \log_3 2 = -\log_3 2$$

である。

(答)  $L = -\log_3 2$

(2)

$g(\theta)$  を変形すると、

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \log_9 (\sin \theta) + \frac{\log_9 (\cos \theta)}{\log_9 3} \\ &= \log_9 (\sin \theta) + 2 \log_9 (\cos \theta) \\ &= \log_9 (\sin \theta) + \log_9 (\cos^2 \theta) \\ &= \log_9 (\sin \theta \cos^2 \theta) \\ &= \log_9 \{ \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) \} \\ &= \log_9 (\sin \theta - \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

となる。 $\sin \theta = t$  とおくと、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき  $0 < t < 1$  である。 $h(t) = t - t^3$  とおくと

$h'(t) = 1 - 3t^2$  であるから、 $h'(t) = 0$  となるのは  $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  のときであり、 $0 < t < 1$  における  $h(t)$

の増減表は以下のようになる。

|         |     |     |                      |     |     |
|---------|-----|-----|----------------------|-----|-----|
| $t$     | (0) | ... | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ... | (1) |
| $h'(t)$ |     | +   | 0                    | -   |     |
| $h(t)$  |     | ↗   |                      | ↘   |     |

増減表より、 $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$  のとき  $h(t)$  は最大値  $h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$  をとる。底は  $9(>1)$  であるから、 $h(t)$

が最大となるとき、 $g(\theta) = \log_9 h(t)$  も最大となるので、

$$\begin{aligned} M &= \log_9 \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ &= \log_9 2 + \log_9 \sqrt{3} - \log_9 9 \\ &= \log_9 2 + \frac{1}{2} \log_3 3^{\frac{1}{2}} - 1 \\ &= \log_9 2 + \frac{1}{4} - 1 \\ &= \log_9 2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

を得る。

(答)  $M = \log_9 2 - \frac{3}{4}$

(3)

(1), (2)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} L - M &= -\log_3 2 - \log_9 \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ &= -2 \log_9 2 - \log_9 \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ &= \log_9 \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{9}{2\sqrt{3}} \right\} \\ &= \log_9 \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

である。ここで  $\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2 - 1^2 = \frac{27}{64} - 1 = -\frac{37}{64} < 0$  より  $\frac{3\sqrt{3}}{8} < 1$  であり、底は  $9(>1)$  であるから、

$$\begin{aligned} \log_9 \frac{3\sqrt{3}}{8} &< 0 \\ \Leftrightarrow L - M &< 0 \\ \Leftrightarrow L &< M \end{aligned}$$

となる。

(答)  $L < M$

(1)

条件より,

$$|\overline{OA}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$|\overline{OP}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

・・・①

$$\overline{OA} \cdot \overline{OP} = 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta = 4 \sin \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \cos \angle AOP &= \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OP}}{|\overline{OA}| |\overline{OP}|} \\ &= \frac{4 \sin \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{4\sqrt{17}}{17} \sin \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \cos \angle AOP = \frac{4\sqrt{17}}{17} \sin \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right)$$

(2)

①より,

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{OA}|^2 |\overline{OP}|^2 - (\overline{OA} \cdot \overline{OP})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{17 - 16 \sin^2 \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right)} \end{aligned}$$

であるから,  $f(\theta) = 17 - 16 \sin^2 \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right)$  とおくと,  $f(\theta)$  が最大るとき  $S(\theta)$  も最大,  $f(\theta)$  が最小るとき  $S(\theta)$  も最小となる。  $0 \leq \theta \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi$  より,  $\theta + \frac{\pi}{6} = \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{5}{6}\pi$  のとき  $S(\theta)$  は最大値  $S\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{17}}{2}$  をとる。  $\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$  のとき  $S(\theta)$  は最小値

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ をとる。}$$

$$\begin{aligned} & \text{最大値 } \frac{\sqrt{17}}{2} \quad (\theta = \frac{5}{6}\pi \text{ のとき}) \\ (\text{答}) \quad & \text{最小値 } \frac{1}{2} \quad (\theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき}) \end{aligned}$$

(1)

条件を(ア),(イ)を満たす2桁の自然数は

12, 21, 15, 51, 24, 42, 33, 45, 54

の9個であるから,  $a_2 = 9$ となる。

(答)  $a_2 = 9$

(2)

条件(ア)を満たす $n$ 桁の自然数は以下の場合に分けられ, それぞれの場合において,  $10^n$ の位の数を加えることで, 条件(ア),(イ)を満たす $n+1$ 桁の自然数を考える。

[1] 各位の和が3の倍数のとき

$10^n$ の位の数が3となるとき, 条件(ア),(イ)を満たす $n+1$ 桁の自然数となる。

[2] 各位の和が3で割ると1余るとき

$10^n$ の位の数が2または5となるとき, 条件(ア),(イ)を満たす $n+1$ 桁の自然数となる。

[3] 各位の和が3で割ると2余るとき

$10^n$ の位の数が1または4となるとき, 条件(ア),(イ)を満たす $n+1$ 桁の自然数となる。

[1]となる $n$ 桁の自然数の個数は $a_n$ 個, [2], [3]となる $n$ 桁の自然数の個数はあわせて $5^n - a_n$ 個であるから,

$$a_{n+1} = a_n + 2(5^n - a_n) = -a_n + 2 \cdot 5^n$$

を得る。

(答)  $a_{n+1} = -a_n + 2 \cdot 5^n$

(3)

(2)の結果を用いて両辺を $5^n$ で割ると,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{5^n} &= -\frac{a_n}{5^n} + 2 \\ \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} &= -\frac{a_n}{5^n} + 2 \end{aligned}$$

となり,  $b_n = 5^n, c_n = \frac{a_n}{b_n}$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -a_n + 2 \cdot 5^n \\ \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} &= -\frac{a_n}{b_n} + 2 \\ \Leftrightarrow 5c_{n+1} &= -c_n + 2 \\ \Leftrightarrow c_{n+1} - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{5} \left( c_n - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

である。ここで,  $a_1 = 1, b_1 = 5$ より

$$\begin{aligned} c_1 - \frac{1}{3} &= \frac{a_1}{b_1} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{2}{15} \end{aligned}$$

であるから, 数列 $\left\{c_n - \frac{1}{3}\right\}$ は, 初項 $-\frac{2}{15}$ , 公比 $-\frac{1}{5}$ の等比数列である。ゆえに,

$$\begin{aligned} c_n - \frac{1}{3} &= -\frac{2}{15} \left( -\frac{1}{5} \right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{5} \right)^n \\ \therefore c_n &= \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{5} \right)^n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

を得る。

(答)  $c_n = \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{5} \right)^n + \frac{1}{3}$