

I

(1)

AB = $\sqrt{5}$ より,

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow |\vec{b} - \vec{a}| &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

である。両辺0以上なので2乗しても同値である。よって,

$$\begin{aligned} |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow 5 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 6 &= 5 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \end{aligned}$$

となる。同様に,

$$\begin{aligned} |\overline{BC}| &= \sqrt{6} \\ \Leftrightarrow |\vec{c} - \vec{b}| &= \sqrt{6} \\ \Leftrightarrow |\vec{c} - \vec{b}|^2 &= 6 \\ \Leftrightarrow |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 &= 6 \\ \Leftrightarrow 5 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 5 &= 6 \\ \therefore \vec{b} \cdot \vec{c} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overline{AC}| &= \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow |\vec{c} - \vec{a}| &= \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow |\vec{c} - \vec{a}|^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow 5 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + 6 &= 5 \\ \therefore \vec{c} \cdot \vec{a} &= 3 \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3, \vec{b} \cdot \vec{c} = 2, \vec{c} \cdot \vec{a} = 3$

(2)

実数 p, q, r を用いて,

$$\overline{OH} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$$

とおく。点Hは平面ABC上にあるので,

$$p + q + r = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。線分ABと線分ACは平行ではなく、 $\overline{OH} \neq \vec{0}, \overline{AB} \neq \vec{0}, \overline{AC} \neq \vec{0}$ であるから、線分OH

と平面ABCが垂直であるとき、 $\overline{OH} \cdot \overline{AB} = 0$ かつ $\overline{OH} \cdot \overline{AC} = 0$ が成立する。よって,

$$\begin{aligned} \overline{OH} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -p|\vec{a}|^2 + q|\vec{b}|^2 + (p - q)\vec{a} \cdot \vec{b} + r\vec{b} \cdot \vec{c} - r\vec{c} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow -6p + 5q + 3(p - q) + 2r - 3r &= 0 \\ \Leftrightarrow -3p + 2q - r &= 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{OH} \cdot \overline{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow (p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -p|\vec{a}|^2 + r|\vec{c}|^2 + (p - r)\vec{c} \cdot \vec{a} + q\vec{b} \cdot \vec{c} - q\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow -6p + 5r + 3(p - r) + 2q - 3q &= 0 \\ \Leftrightarrow -3p - q + 2r &= 0 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。これら①、②、③を解くと,

$$p = \frac{1}{7}, q = \frac{3}{7}, r = \frac{3}{7}$$

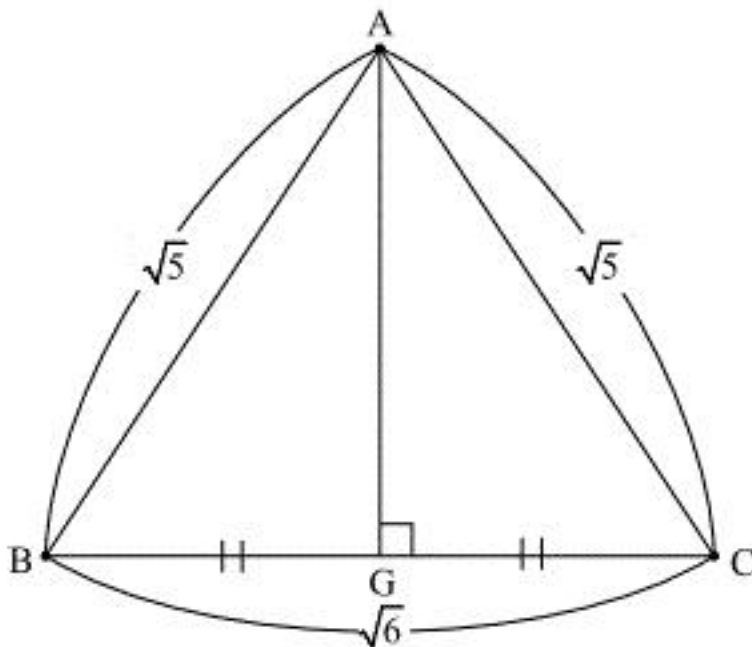
となるから,

$$\overline{OH} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}$$

である。

(答) $\overline{OH} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}$

(3)



$\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形であるから、点Aから辺BCに垂線AGを下ろすと

$$BG = GC = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

である。三平方の定理より,

$$\begin{aligned} AG &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AG &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned} |\overline{OH}|^2 &= \left| \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{7^2} \left(|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 9|\vec{c}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 18\vec{b} \cdot \vec{c} + 6\vec{c} \cdot \vec{a} \right) \\ &= \frac{1}{49} (6 + 9 \cdot 5 + 9 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 18 \cdot 2 + 6 \cdot 3) \\ &= \frac{24}{7} \end{aligned}$$

であり、 $|\overline{OH}| \geq 0$ より

$$|\overline{OH}| = \frac{2\sqrt{42}}{7}$$

である。ゆえに、四面体OABCの体積は、底面を $\triangle ABC$ 、高さをOHとみて,

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{42}}{7} = \sqrt{2}$$

である。

(答) $\sqrt{2}$

$f(x) = x^2 - 2a^t x + a$ とおく。

$$f(x) = (x - a^t)^2 + a - a^{2t}$$

より、 $y = f(x)$ のグラフは下に凸で、頂点の座標は $(a^t, a - a^{2t})$ である。よって、2 次方程式

$f(x) = 0$ が a より小さい 2 つの異なる実数解を持つとき、 $y = f(x)$ と $y = 0$ が $x < a$ の部分で
共有点を 2 つもつから、 $f(x) = 0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{cases} f(a) > 0 \\ a^t < a \\ \frac{D}{4} = a^{2t} - a > 0 \end{cases}$$

を満たす。

$$\begin{aligned} f(a) &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a^t \cdot a + a &> 0 \\ \Leftrightarrow a(a - 2a^t + 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a+1}{2} &> a^t \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow \log_a \frac{a+1}{2} &> t \quad (\because a > 1) \\ a^t &< a \\ \Leftrightarrow t &< 1 \quad (\because a > 1) \\ a^{2t} - a &> 0 \\ \Leftrightarrow a^{2t} &> a \\ \Leftrightarrow 2t &> 1 \quad (\because a > 1) \\ \Leftrightarrow t &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

より、 $f(x) = 0$ が a より小さい 2 つの異なる実数解をもつ必要十分条件は

$$\begin{cases} t < \log_a \frac{a+1}{2} \\ t < 1 \\ t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

である。ここで、底の a は 1 より大きいから、

$$\begin{aligned} 1 - \log_a \frac{a+1}{2} &= \log_a a - \log_a \frac{a+1}{2} \\ &= \log_a \frac{2a}{a+1} \\ &= \log_a \left(1 + \frac{a-1}{a+1} \right) \\ &> \log_a 1 \left(\because \frac{a-1}{a+1} > 0 \right) \\ &= 0 \\ \log_a \frac{a+1}{2} - \frac{1}{2} &= \log_a \frac{a+1}{2} - \log_a \sqrt{a} \\ &= \log_a \frac{a+1}{2\sqrt{a}} \\ &= \log_a \left(1 + \frac{a-2\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}} \right) \\ &= \log_a \left(1 + \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{2\sqrt{a}} \right) \\ &> \log_a 1 \left(\because \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{2\sqrt{a}} > 0 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、 $\frac{1}{2} < \log_a \frac{a+1}{2} < 1$ であるから、 $f(x) = 0$ が a より小さい 2 つの異なる実数解を持つよう
な実数 t の値の範囲は、

$$\frac{1}{2} < t < \log_a \frac{a+1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} < t < \log_a \frac{a+1}{2}$$

(1)

直線 ℓ の方程式は

$$y-0=-\{x-(-36)\}$$

$$\Leftrightarrow y=-x-36 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。 C と ℓ の交点 P の x 座標は、 $\textcircled{1}$ と $C: y=\frac{1}{6}x^3-x$ の連立解で与えられるから、

$$\frac{1}{6}x^3-x=-x-36$$

を満たす。

$$\frac{1}{6}x^3-x=-x-36$$

$$\Leftrightarrow x^3+6^3=0$$

$$\Leftrightarrow (x+6)(x^2-6x+36)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+6)\{(x-3)^2+27\}=0$$

$$\therefore x=-6$$

であるから、 P の x 座標は -6 である。これを $\textcircled{1}$ に代入して、 y 座標は $-(-6)-36=-30$ である。

(答) $P(-6, -30)$

(2)

直線 m の方程式を $y=ax+b$ 、接点の x 座標を c とおく。ただし、 a, b, c は実数で $c \neq -6$ である。曲線 C と直線 m の共有点の x 座標は、以下の3次方程式

$$\frac{1}{6}x^3-x=ax+b$$

$$\Leftrightarrow x^3-6(a+1)x-6b=0$$

を満たす。 x 座標が c である点は曲線 C と直線 m の接点であるから、 $x=c$ はこの方程式の重解である。また点 P も曲線 C と直線 m の共有点であるため、 $x=-6$ も解である。3次方程式の解は3つであるから、方程式の解は $x=-6, c$ (重解) である。ゆえに、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} -6+c+c=0 & \cdots \textcircled{2} \\ -6c-6c+c^2=-6(a+1) & \cdots \textcircled{3} \\ -6c^2=6b & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成立する。 $\textcircled{2}$ より $c=3$ が得られ、これを $\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ に代入して

$$-18-18+9=-6(a+1)$$

$$\Leftrightarrow a+1=\frac{-27}{-6}$$

$$\therefore a=\frac{7}{2}$$

$$-6 \cdot 9=6b$$

$$\therefore b=-9$$

となるから、直線 m の方程式は

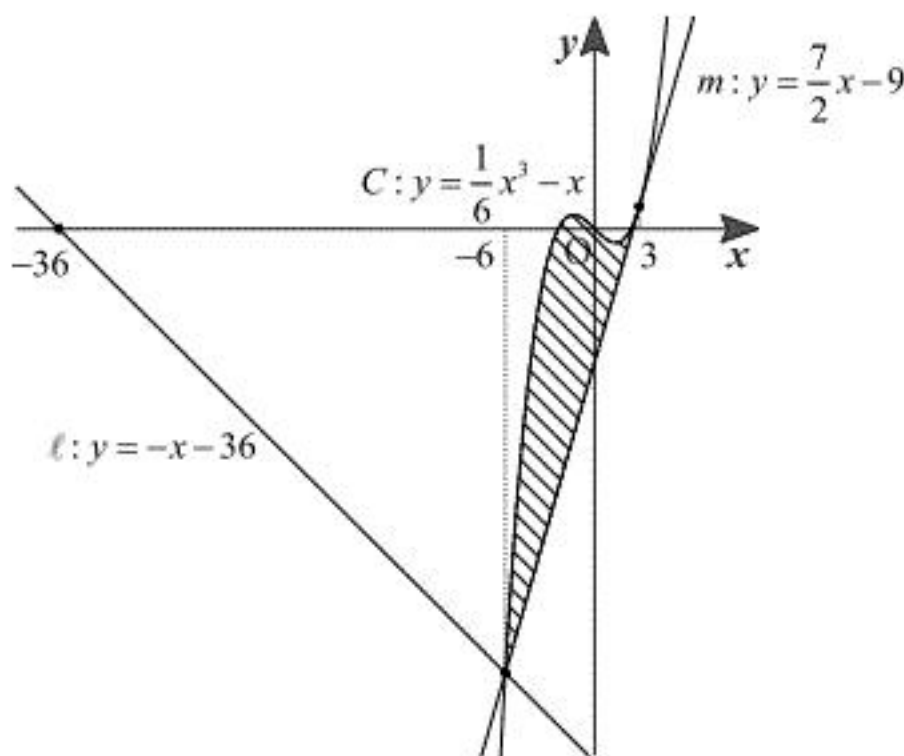
$$y=\frac{7}{2}x-9$$

である。

(答) $y=\frac{7}{2}x-9$

(3)

C と m で囲まれる図形は図の斜線部である。



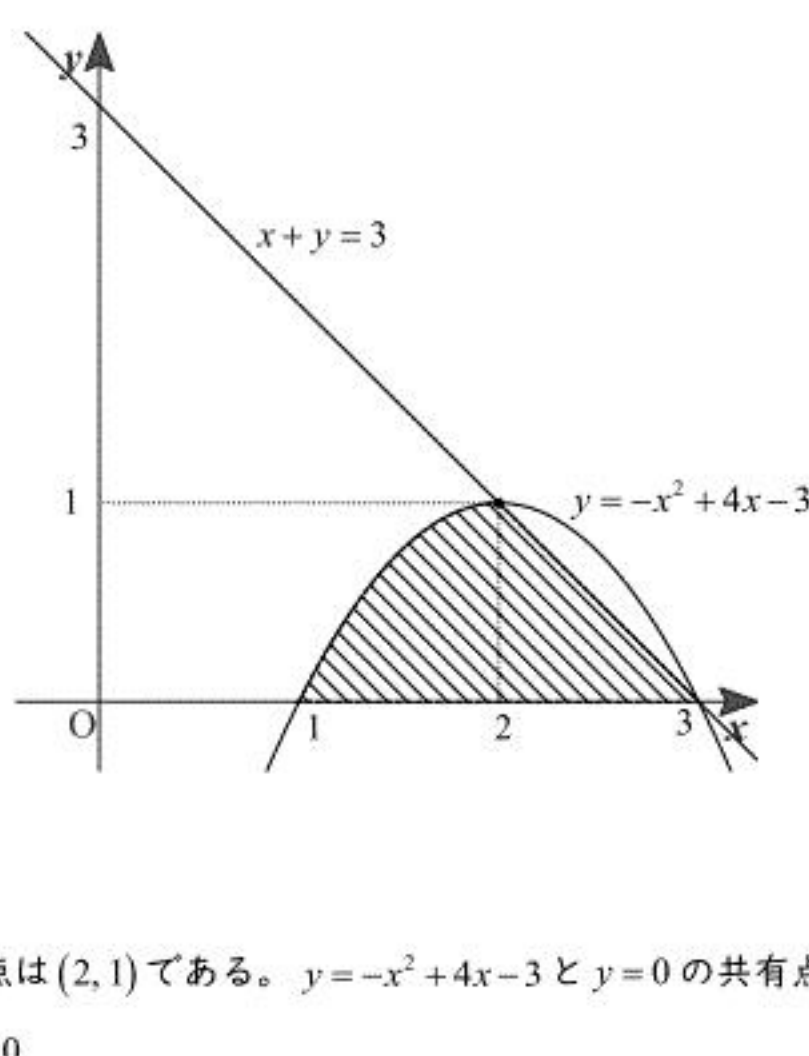
斜線部の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-6}^3 \left\{ \left(\frac{1}{6}x^3 - x \right) - \left(\frac{7}{2}x - 9 \right) \right\} dx \\ &= \int_{-6}^3 \left\{ \frac{1}{6}(x-3)^2(x+6) \right\} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{-6}^3 \left\{ (x-3)^2(x-3+9) \right\} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{-6}^3 \left\{ (x-3)^3 + 9(x-3)^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{(x-3)^4}{4} + 3(x-3)^3 \right]_{-6}^3 \\ &= -\frac{1}{6} \left\{ \frac{(-9)^4}{4} + 3(-9)^3 \right\} \\ &= \frac{9^3}{6} \cdot \left(3 - \frac{9}{4} \right) \\ &= \frac{729}{8} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{729}{8}$

4-I



(1)

$y = -x^2 + 4x - 3$ の頂点は $(2, 1)$ である。 $y = -x^2 + 4x - 3$ と $y = 0$ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow -(x-1)(x-3) &= 0 \\ \therefore x &= 1, 3 \end{aligned}$$

である。また、 $y = -x^2 + 4x - 3$ と $x + y = 3$ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 3 &= -x + 3 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow -(x-2)(x-3) &= 0 \\ \therefore x &= 2, 3 \end{aligned}$$

であるから、領域 D は上図の斜線部(ただし境界はすべて含む)となる。その面積 S は、領域 D を $x = 2$ で分割すること、

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3) dx + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \int_1^2 \{ -(x-2)^2 + 1 \} dx + \frac{1}{2} \\ &= \left[-\frac{(x-2)^3}{3} + x \right]_1^2 + \frac{1}{2} \\ &= (2-1) + \frac{(1-2)^3}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\frac{7}{6}$

(2)

直線 $y = mx$ と放物線 $y = -x^2 + 4x - 3$ が共有点をただ1つもつとき、下図のように直線 $y = mx$ と放物線 $y = -x^2 + 4x - 3$ は接する。このとき、

$$\begin{aligned} mx &= -x^2 + 4x - 3 \\ \Leftrightarrow x^2 + (m-4)x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

は重解を持つ。よって、この2次方程式の判別式を D_1 とおくと、

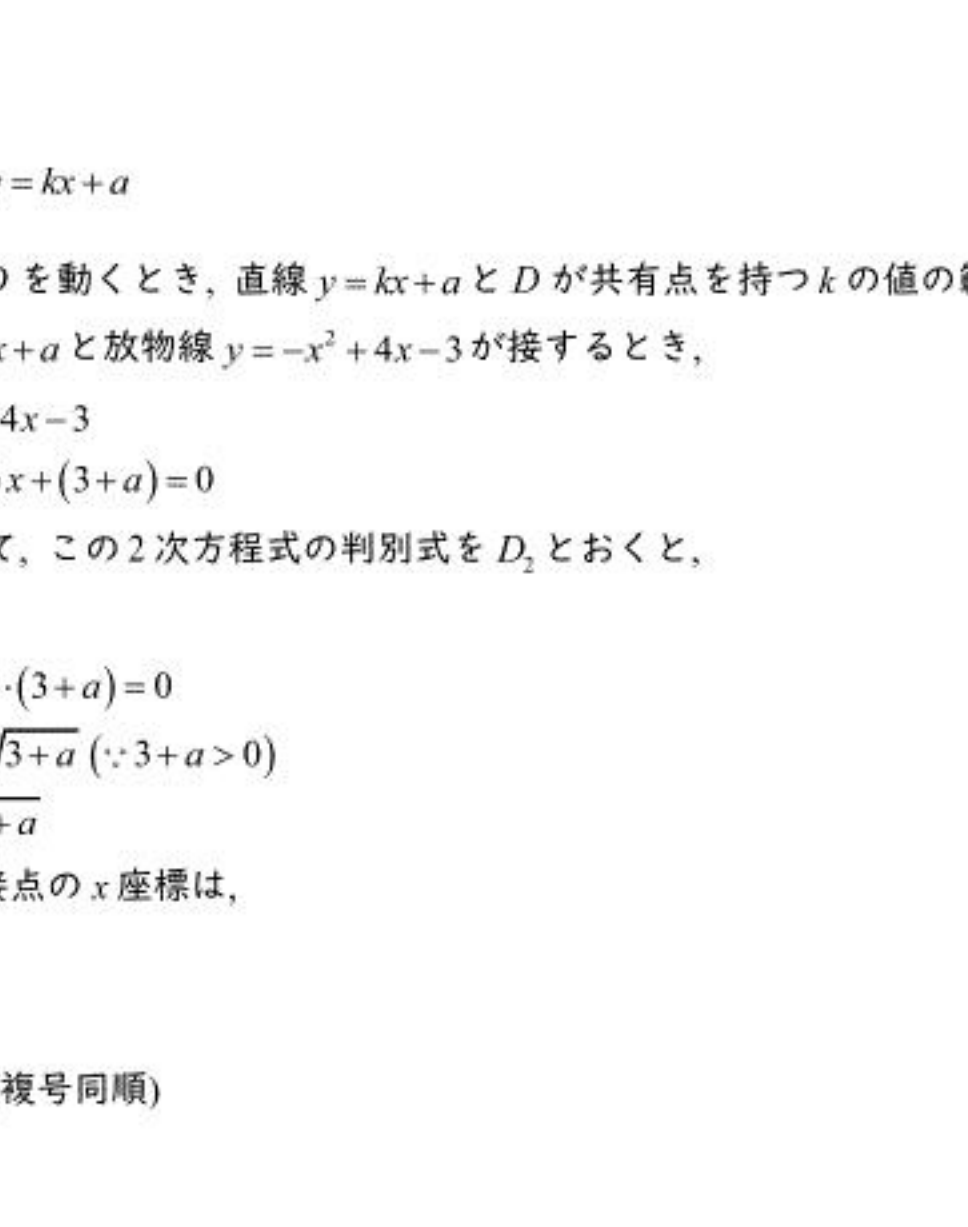
$$\begin{aligned} D_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m-4)^2 - 4 \cdot 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 8m + 4 &= 0 \\ \therefore m &= 4 \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

が得られ、このとき接点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x &= -\frac{m-4}{2} \\ &= \mp\sqrt{3} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

である。 $m = 4 + 2\sqrt{3}$ のとき、接点 $(-\sqrt{3}, -4\sqrt{3}-6)$ は領域 D に含まれないため、条件に適さ

ない。 $m = 4 - 2\sqrt{3}$ のとき、接点 $(\sqrt{3}, 4\sqrt{3}-6)$ は領域 D に含まれ、グラフより直線 $y = mx$ は領域 D とただ1つの共有点をもつ。したがって、求める m は $m = 4 - 2\sqrt{3}$ である。



(答) $m = 4 - 2\sqrt{3}$

(3)

k を定数として、

$$\frac{y-a}{x} = k \Leftrightarrow y = kx + a$$

とおく。点 (x, y) が D を動くとき、直線 $y = kx + a$ と D が共有点を持つ k の値の範囲を求めればよい。直線 $y = kx + a$ と放物線 $y = -x^2 + 4x - 3$ が接するとき、

$$\begin{aligned} kx + a &= -x^2 + 4x - 3 \\ \Leftrightarrow x^2 + (k-4)x + (3+a) &= 0 \end{aligned}$$

は重解を持つ。よって、この2次方程式の判別式を D_2 とおくと、

$$\begin{aligned} D_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-4)^2 - 4 \cdot (3+a) &= 0 \\ \Leftrightarrow k-4 &= \pm 2\sqrt{3+a} \quad (\because 3+a > 0) \\ \therefore k &= 4 \pm 2\sqrt{3+a} \end{aligned}$$

が得られ、このとき接点の x 座標は、

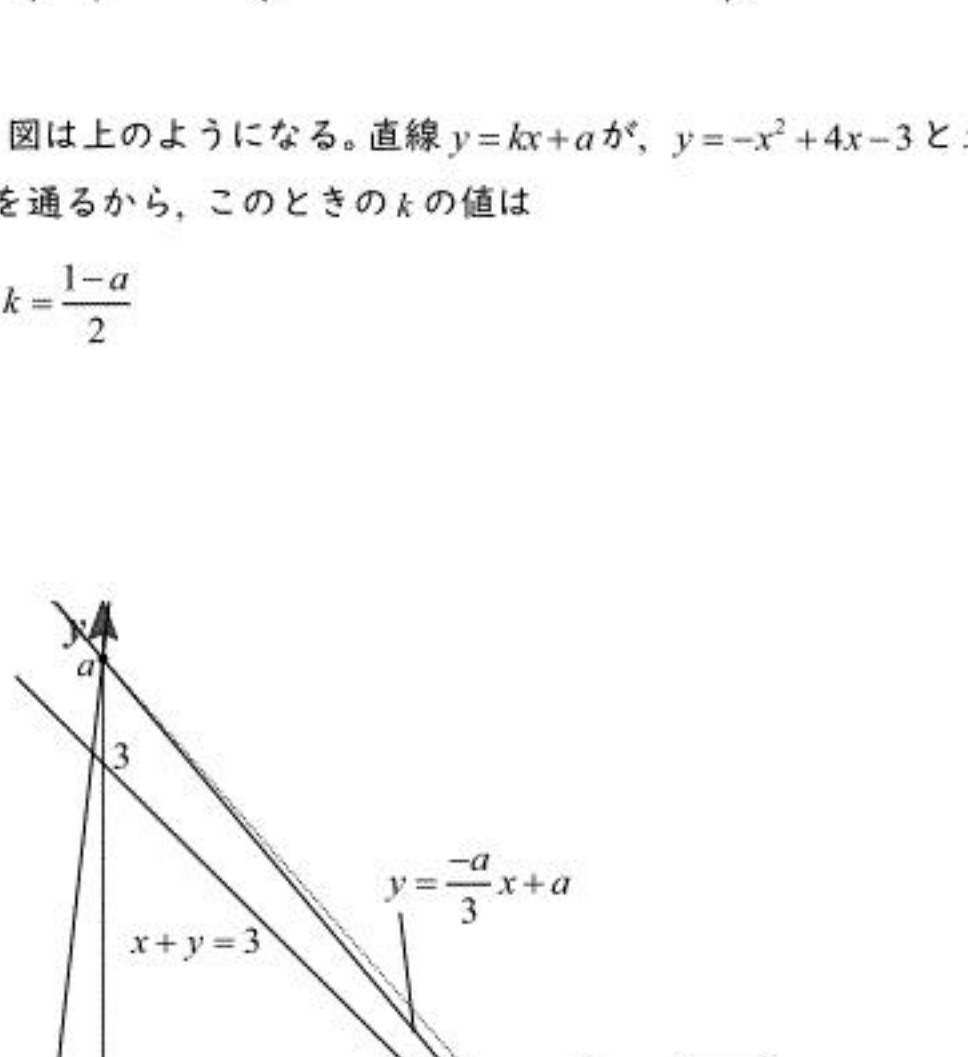
$$\begin{aligned} x &= -\frac{k-4}{2} \\ &= \mp\sqrt{3+a} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

である。

[1] $0 \leq a < 1$ のとき

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{3+a} < 2$$

より、 $-\sqrt{3+a} < 1 < \sqrt{3+a} < 2$ であるから、接点 $(\sqrt{3+a}, 4\sqrt{3+a}-6-a)$ は D に含まれる。



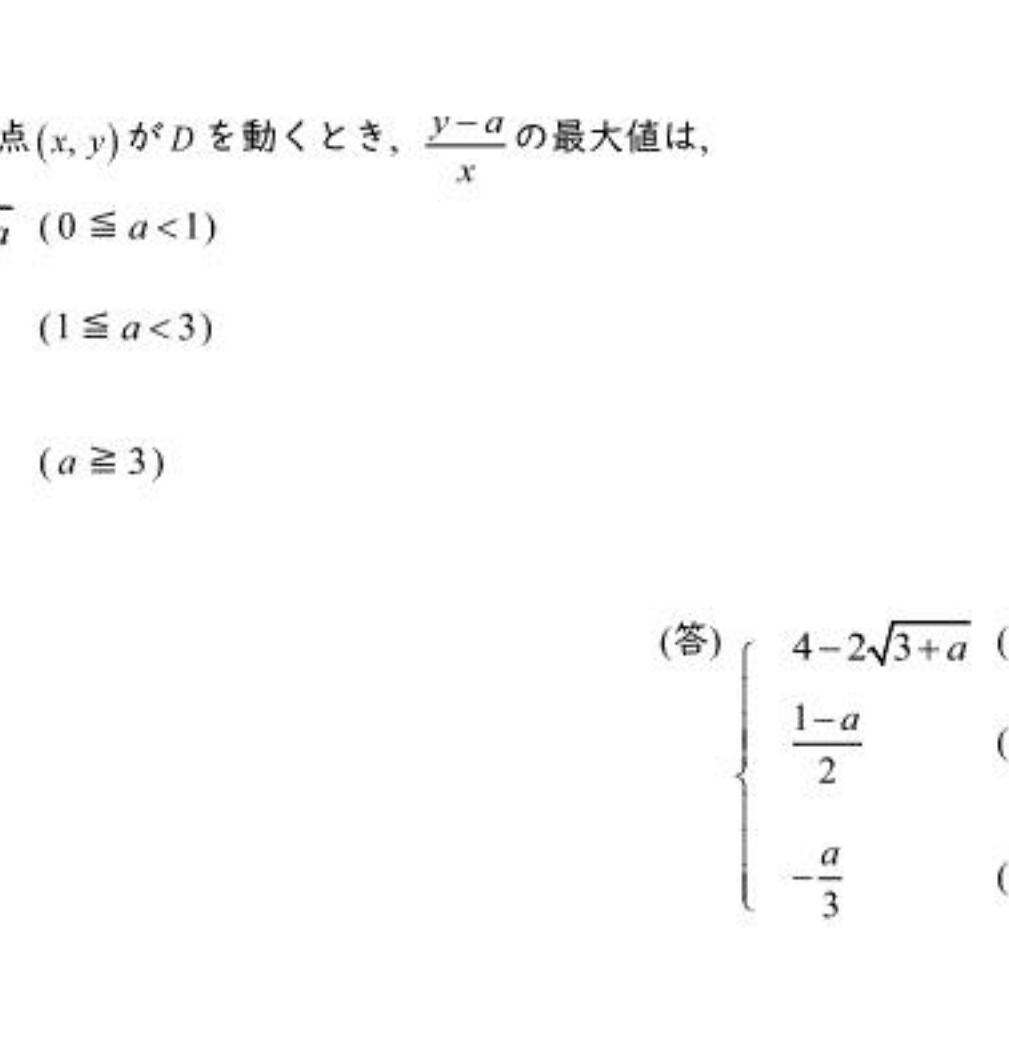
k が最大のとき、直線 $y = kx + a$ と領域 D の関係は上図のようになる。直線 $y = kx + a$ が点

$(\sqrt{3+a}, 4\sqrt{3+a}-6-a)$ を通るから、このときの k の値は

$$k = 4 - 2\sqrt{3+a}$$

である。

[2] $1 \leq a < 3$ のとき

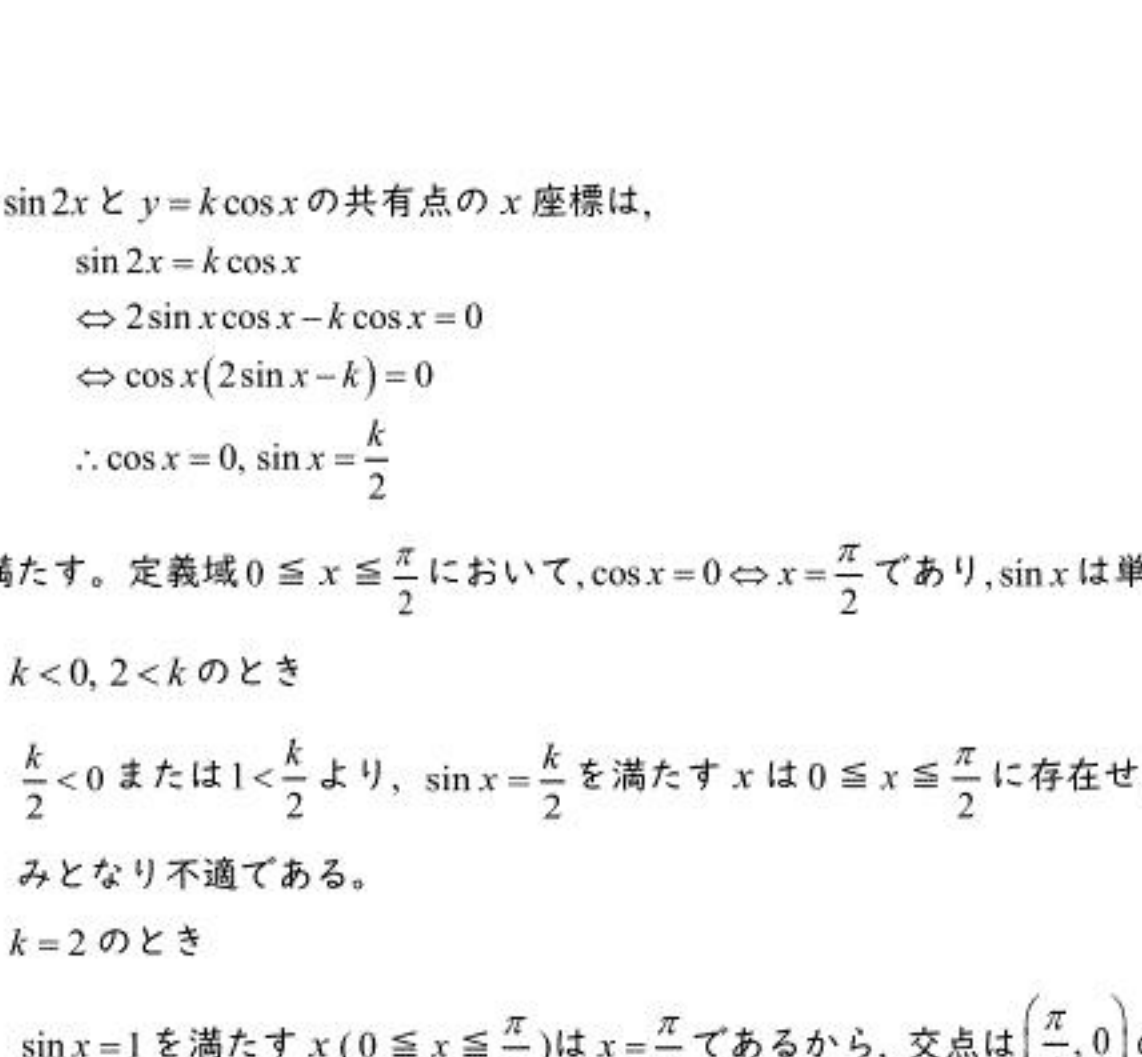


k が最大のとき、図は上のようになる。直線 $y = kx + a$ が、 $y = -x^2 + 4x - 3$ と $x + y = 3$ の交点の1つの $(2, 1)$ を通るから、このときの k の値は

$$1 = k \cdot 2 + a \Leftrightarrow k = \frac{1-a}{2}$$

である。

[3] $a \geq 3$ のとき



k が最大のとき、図は上のようになり、直線 $y = kx + a$ と D が $y = -x^2 + 4x - 3$ と $x + y = 3$ と $y = 0$ の交点 $(3, 0)$ を通るから、このときの k の値は

$$0 = k \cdot 3 + a \Leftrightarrow k = -\frac{a}{3}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、点 (x, y) が D を動くとき、 $\frac{y-a}{x}$ の最大値は、

$$\begin{cases} 4 - 2\sqrt{3+a} & (0 \leq a < 1) \\ \frac{1-a}{2} & (1 \leq a < 3) \\ -\frac{a}{3} & (a \geq 3) \end{cases}$$

となる。

(答) $\begin{cases} 4 - 2\sqrt{3+a} & (0 \leq a < 1) \\ \frac{1-a}{2} & (1 \leq a < 3) \\ -\frac{a}{3} & (a \geq 3) \end{cases}$

4-II

(1)

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leq \sin 2x$ であるから、 C_1 と x 軸で囲まれた図形の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \\ &= \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $S = 1$

(2)

$y = \sin 2x$ と $y = k \cos x$ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} \sin 2x &= k \cos x \\ \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - k \cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - k) &= 0 \\ \therefore \cos x &= 0, \sin x &= \frac{k}{2} \end{aligned}$$

を満たす。定義域 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ であり、 $\sin x$ は単調増加である。

[1] $k < 0, 2 < k$ のとき

$\frac{k}{2} < 0$ または $1 < \frac{k}{2}$ より、 $\sin x = \frac{k}{2}$ を満たす x は $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に存在せず、交点は $(\frac{\pi}{2}, 0)$ のみとなり不適である。

[2] $k = 2$ のとき

$\sin x = 1$ を満たす x ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) は $x = \frac{\pi}{2}$ であるから、交点は $(\frac{\pi}{2}, 0)$ のみとなり不適である。

[3] $0 \leq k < 2$ のとき

$0 \leq \frac{k}{2} < 1$ より、 $\sin x = \frac{k}{2}$ を満たす x は $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ にただ1つ存在する。よって、 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 以外の点でも交わり、条件を満たす。この x 座標が α であるので、

$$\sin \alpha = \frac{k}{2}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、 $\sin \alpha = \frac{k}{2}$ であり、 k の値の範囲は $0 \leq k < 2$ である。

(答) $\sin \alpha = \frac{k}{2}$ 、 k の値の範囲 $0 \leq k < 2$

(3)

C_1 と C_2 で囲まれた部分は上図の斜線部となる。その面積 T は、

$$\begin{aligned} T &= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - k \cos x) dx \\ &= \left[-\frac{\cos 2x}{2} - k \sin x \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(-\frac{\cos 2\alpha}{2} - k \sin \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\frac{\cos 2\alpha}{2} - k \sin \alpha \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - k \right) + \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2} + k \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} - k + \frac{1}{2} - \left(\frac{k}{2} \right)^2 + k \cdot \frac{k}{2} \quad \left(\because \sin \alpha = \frac{k}{2} \right) \\ &= \frac{k^2}{4} - k + 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{k^2}{4} - k + 1$

(4)

(1)より、 C_1 が S を2等分するとき、

$$T = \frac{1}{2}$$

となる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{k^2}{4} - k + 1 &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow k^2 - 4k + 2 &= 0 \\ \therefore k &= 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

であり、(2)より $0 \leq k < 2$ であるから、 C_1 が S を2等分するとき、 k の値は

$$k = 2 - \sqrt{2}$$

である。

(答) $k = 2 - \sqrt{2}$