

(1)

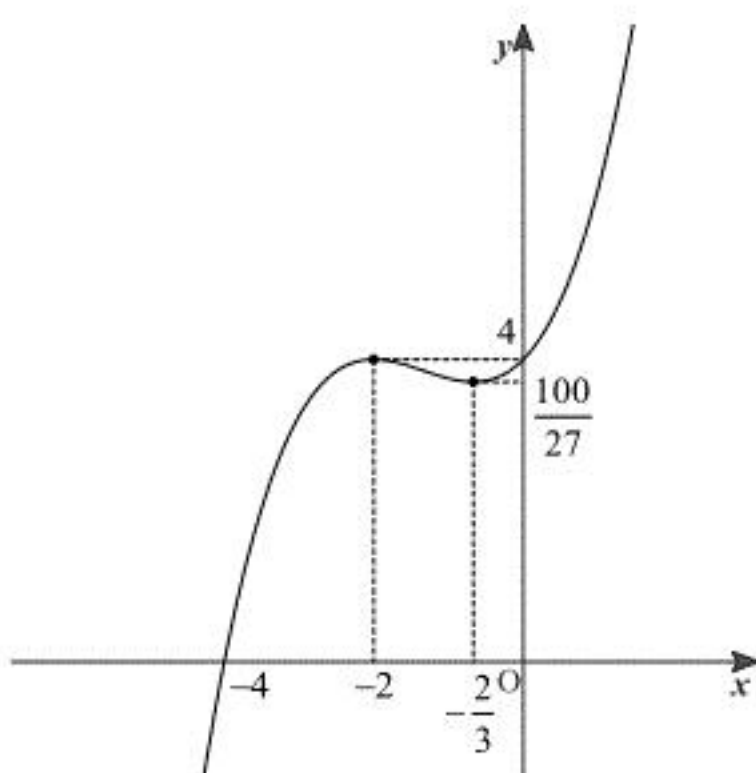
 $a=b=1$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}x^3 + x^2 + x + 4 \\ &= \frac{1}{4}(x+4)(x^2+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{4}x^2 + 2x + 1 \\ &= \frac{3}{4}(x+2)\left(x+\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

であるから、増減表は以下のようになる。

x	...	-2	...	$-\frac{2}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{100}{27}$	$\nearrow$

よって、 $f(x)$ の極値は、 $f(-2)=4$ 、 $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{100}{27}$ であり、グラフは次のようになる。(答) 極値 $f(-2)=4$ 、 $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{100}{27}$ ，グラフ 前図

(2)

$$f(1)=\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + a + b - \frac{17}{4} = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、これが極大値であることから、

$$f'(1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2a + b + \frac{3}{4} = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となることが必要である。

①-②より

$$4a^2 - a - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4a-5)(a+1) = 0$$

$$\therefore a = -1, \frac{5}{4}$$

が必要である。

[1] $a=-1$ のとき②より、 $b=\frac{5}{4}$ である。このとき

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + \frac{5}{4}x + 4$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{4}x^2 - 2x + \frac{5}{4} \\ &= \frac{3}{4}(x-1)\left(x-\frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

であるから、増減表は以下のようになる。

x	...	1	...	$\frac{5}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	$\frac{241}{54}$	$\nearrow$

よって、 $f(x)$ は $x=1$ で極大値 $\frac{9}{2}$ をとっており、条件を満たしている。このとき、 $f(x)$ の極小値は、増減表より $f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{241}{54}$ である。[2] $a=\frac{5}{4}$ のとき②より $b=-\frac{13}{4}$ である。このとき

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{25}{4}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{13}{4} \\ &= \frac{3}{4}(x-1)\left(x+\frac{13}{3}\right) \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

より、 $f''(1) > 0$ であるから、 $f(x)$ は $x=1$ で極小値をとっており、条件を満たさず不適である。以上[1]、[2]より、 $f(x)$ が $x=1$ で極大値 $\frac{9}{2}$ をとるとき、 $f(x)$ の極小値は、 $f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{241}{54}$ である。(答) $\frac{241}{54}$

(1)

$$f(x) = x^2 + bx + 1$$

であるから、

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} f(x) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_k^{k+1} (x^2 + bx + 1) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + x \right]_k^{k+1} &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore k^2 + (1+b)k + \frac{b}{2} + \frac{4}{3} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

をみたす実数 k が存在する b の値の範囲を求めればよい。したがって、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすれば、

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 - \frac{13}{3} \geq 0$$

$$\therefore b \leq -\sqrt{\frac{13}{3}}, \quad b \geq \sqrt{\frac{13}{3}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b \leq -\sqrt{\frac{13}{3}}, \quad b \geq \sqrt{\frac{13}{3}}$$

(2)

$$\int_{k-1}^k f(x) dx = \int_k^{k+1} f(x-1) dx$$

であるから、

$$\int_k^{k+1} \{f(x) - f(x-1)\} dx = 0$$

となる実数 k を求めればよい。したがって、

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} \{f(x) - f(x-1)\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_k^{k+1} (2ax - a + b) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[ax^2 - (a-b)x \right]_k^{k+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2ak + b &= 0 \\ \therefore k &= -\frac{b}{2a} \quad (\because a \neq 0)\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad k = -\frac{b}{2a}$$

(3)

$$\int_{k-1}^k f(x) dx = \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_{k+1}^{k+2} f(x) dx$$

をみたす実数 k の存在を仮定する。

$$\int_{k-1}^k f(x) dx = \int_k^{k+1} f(x) dx$$

となるから、(2) より $k = -\frac{b}{2a}$ である。

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = \int_{k+1}^{k+2} f(x) dx$$

について、あらためて $k+1 = k'$ として書き直せば、

$$\int_{k'-1}^{k'} f(x) dx = \int_{k'}^{k'+1} f(x) dx$$

となるから、同様に(2)より $k' = -\frac{b}{2a}$ となる。以上より $k+1 = k'$ となるが、これを満たす実数 k は存在しないので仮定に矛盾する。よって

$$\int_{k-1}^k f(x) dx = \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_{k+1}^{k+2} f(x) dx$$

をみたす実数 k は存在しない。

(証明終)

(1)

$x \neq 1, y \neq 1$ より, $\log_x y \neq 0, \log_y x \neq 0$ である。また, 真数条件より, $x > 0$ かつ $y > 0$ である。

$x = \frac{1}{2}$ のとき,

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}} y - 2 \log_y \frac{1}{2} - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\log_2 y}{\log_2 \frac{1}{2}} - 2 \frac{\log_2 \frac{1}{2}}{\log_2 y} - 1 &< 0 \\ \therefore -\log_2 y + \frac{2}{\log_2 y} - 1 &< 0\end{aligned}$$

ここで, $\log_2 y = t$ とおけば, $t \neq 0$ である。

[1] $t < 0$, すなわち $0 < y < 1$ のとき

$$\begin{aligned}-t + \frac{2}{t} - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow -t^2 - t + 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow -(t+2)(t-1) &> 0 \\ \therefore -2 < t < 0\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}-2 < \log_2 y < 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} < y < 1\end{aligned}$$

を得る。

[2] $t > 0$, すなわち $1 < y$ のとき

$$\begin{aligned}-t + \frac{2}{t} - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow -t^2 - t + 2 &< 0 \\ \Leftrightarrow -(t+2)(t-1) &< 0 \\ \therefore 1 < t\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}1 < \log_2 y \\ \Leftrightarrow 2 < y\end{aligned}$$

を得る。

以上[1], [2]より, $\frac{1}{4} < y < 1, 2 < y$ である。

(答) $\frac{1}{4} < y < 1, 2 < y$

(2)

$$\begin{aligned}\log_x y - 2 \log_y x - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow \log_x y - \frac{2}{\log_x y} - 1 &< 0\end{aligned}$$

となる。 $\log_x y = s$ とおく。

[1] $0 < x < 1$ のとき

[i] $s < 0$, すなわち $y > 1$ のとき

$$\begin{aligned}s - \frac{2}{s} - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow s^2 - s - 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow (s-2)(s+1) &> 0 \\ \therefore s < -1\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}\log_x y &< -1 \\ \therefore \frac{1}{x} &< y\end{aligned}$$

を得る。

[ii] $s > 0$, すなわち $0 < y < 1$ のとき

$$\begin{aligned}s - \frac{2}{s} - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow s^2 - s - 2 &< 0 \\ \Leftrightarrow (s-2)(s+1) &< 0 \\ \therefore 0 < s < 2\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}0 < \log_x y < 2 \\ \therefore x^2 < y < 1\end{aligned}$$

を得る。

以上[i], [ii]より $x^2 < y < 1, \frac{1}{x} < y$ となる。

[2] $x > 1$ のとき

[i] $s < 0$, すなわち $0 < y < 1$ のとき

$$\begin{aligned}s - \frac{2}{s} - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow s^2 - s - 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow (s-2)(s+1) &> 0 \\ \therefore s < -1\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\log_x y &< -1 \\ \therefore 0 < y < \frac{1}{x}\end{aligned}$$

を得る。

[ii] $s > 0$, すなわち $y > 1$ のとき

$$\begin{aligned}s - \frac{2}{s} - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow s^2 - s - 2 &< 0 \\ \Leftrightarrow (s-2)(s+1) &< 0 \\ \therefore 0 < s < 2\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}0 < \log_x y < 2 \\ \therefore 1 < y < x^2\end{aligned}$$

を得る。

以上[i], [ii]より $0 < y < \frac{1}{x}, 1 < y < x^2$ となる。

以上[1], [2]より, 不等式(*)を満たす y の値の範囲は,

$$\begin{cases} x^2 < y < 1, \frac{1}{x} < y & (0 < x < 1) \\ 0 < y < \frac{1}{x}, 1 < y < x^2 & (1 < x) \end{cases}$$

である。

(答) $\begin{cases} x^2 < y < 1, \frac{1}{x} < y & (0 < x < 1) \\ 0 < y < \frac{1}{x}, 1 < y < x^2 & (1 < x) \end{cases}$

(1)

4点を xy 平面に置くことを考える。このとき、 $O(0, 0)$, $C(5, 0)$ としても一般性を欠かない。
 $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ とおけば、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$$

$$\Leftrightarrow 5x_A = 3$$

$$\therefore x_A = \frac{3}{5}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 4$$

$$\Leftrightarrow 5x_B = 4$$

$$\therefore x_B = \frac{4}{5}$$

となる。また、 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$ より、

$$x_A^2 + y_A^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow y_A^2 = \frac{16}{25}$$

$$\therefore y_A = \pm \frac{4}{5}$$

$$x_B^2 + y_B^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow y_B^2 = \frac{9}{25}$$

$$\therefore y_B = \pm \frac{3}{5}$$

を得る。したがって、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_A x_B + y_A y_B$ の値としてあり得るのは、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \frac{12}{25} + \frac{12}{25} \\ &= \frac{24}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \frac{12}{25} - \frac{12}{25} \\ &= 0 \end{aligned}$$

の2通りである。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{24}{25}, 0$$

(2)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= 2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

であるから、(1)より $|\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{2}{25}$, 2となる。したがって、 $|\overrightarrow{AB}| \geq 0$ より、

$$|\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{2}}{5}, \sqrt{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{2}}{5}, \sqrt{2}$$

(1)

操作が終了したとき、上段の横一行、または下段の横一行が黒く塗りつぶされている。

[1] 上段の横一行が塗りつぶされる場合

1, 2, 3, 4 が 4 回で取り出されるから、その確率は、

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{70}$$

である。

[2] 下段の横一行が塗りつぶされる場合

対称性より、その確率は[1]と同様で、 $\frac{1}{70}$ である。

[1], [2]より 4 回で操作が終了する確率は $\frac{1}{70} + \frac{1}{70} = \frac{1}{35}$ である。

(答) $\frac{1}{35}$

(2)

(1)と同様に場合分けする。

[1] 上段の横一行が塗りつぶされる場合

5 回目までで 1, 2, 3, 4 から 3 つ、5, 6, 7, 8 から 2 つ取り出し、6 回目に 1, 2, 3, 4 のうち、取り出していないものを取り出すから、その確率は、

$$\frac{{}_4C_3 \cdot {}_4C_2 \cdot 5!}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{7}$$

である。

[2] 下段の横一行が塗りつぶされる場合

対称性より、その確率は[1]と同様で $\frac{1}{7}$ である。

以上[1], [2]より、操作がちょうど 6 回で終了する確率は $\frac{2}{7}$ である。

(答) $\frac{2}{7}$

(3)

(1)と同様に場合分けする。

[1] 上段の横一行が塗りつぶされる場合

6 回目までで 1, 2, 3, 4 から 3 つ、5, 6, 7, 8 から 3 つ取り出し、7 回目に 1, 2, 3, 4 のうち、取り出していないものを取り出すから、その確率は、

$$\frac{{}_4C_3 \cdot {}_4C_3 \cdot 6!}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2}{7}$$

である。

[2] 下段の横一行が塗りつぶされる場合

対称性より、その確率は[1]と同様で $\frac{2}{7}$ である。

以上[1], [2]より操作がちょうど 7 回で終了する確率は $\frac{4}{7}$ である。

(答) $\frac{4}{7}$