

I

(1)

与式は

$$kx^2 - 2x + 4(k-1)y + 4k - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow k(x^2 + 4y + 4) + (-2x - 4y - 4) = 0$$

と変形できる。これが k についての恒等式となればよいので

$$x^2 + 4y + 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-2x - 4y - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。②より $4y = -2x - 4$ であり、これを①に代入すると

$$x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, 2$$

を得る。これを②に代入すると、 $(x, y) = (0, -1), (2, -2)$ が得られる。

(答) $(0, -1), (2, -2)$

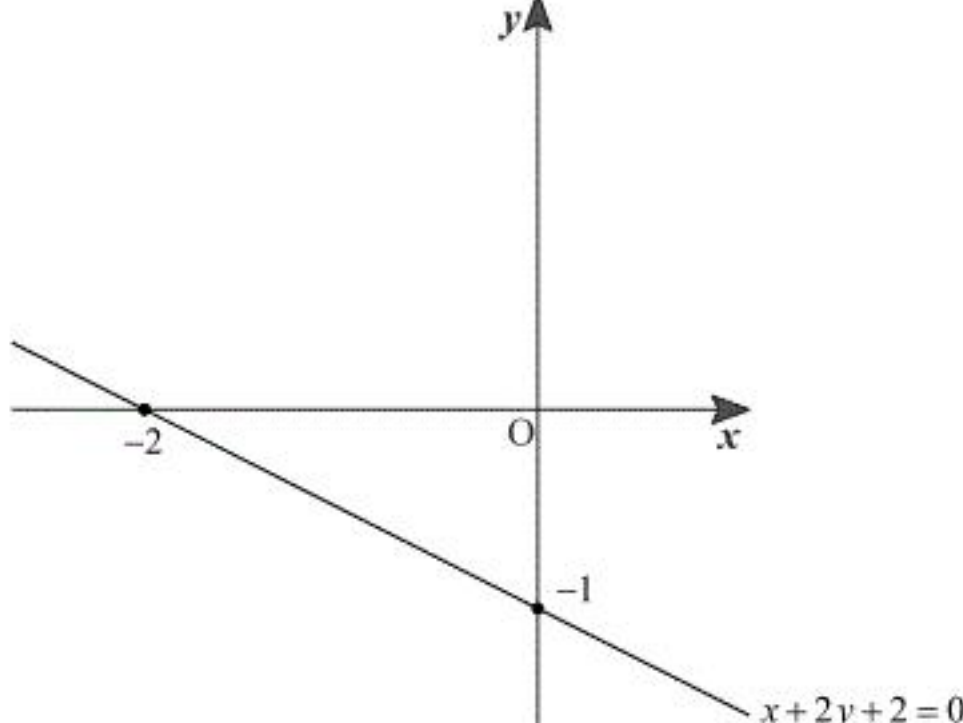
(2)

$k=0$ のとき、与式は

$$-2x - 4y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$$

となるので、 C の概形は下図のような直線になる。



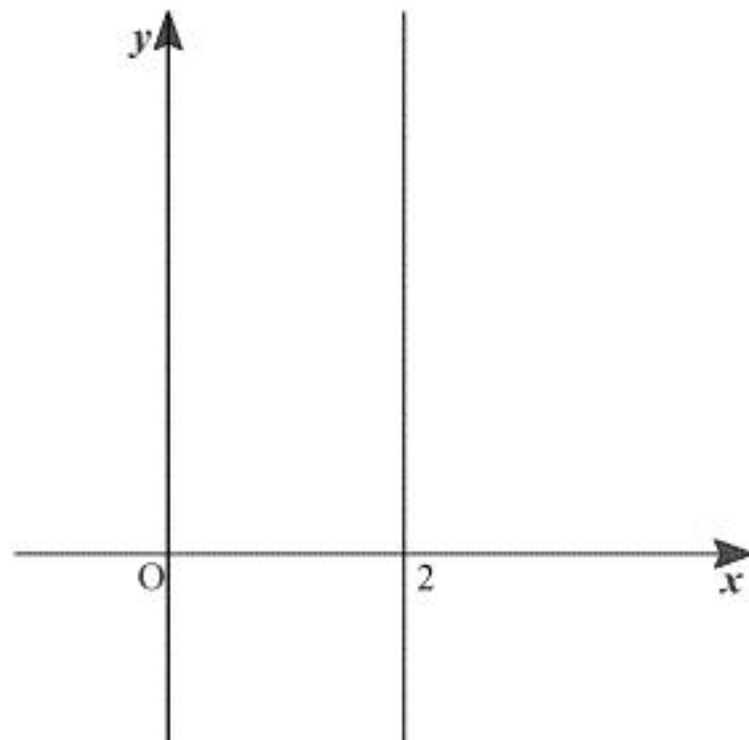
また、 $k=1$ のとき、与式は

$$x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, 2$$

となるので、 C の概形は下図のような直線になる。



(答) 前二図

(3)

(2)より、 $k=0, 1$ のとき、 C は放物線とならない。 $k \neq 0, 1$ のとき、与式は

$$kx^2 - 2x + 4(k-1)y + 4k - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4(k-1)}(-kx^2 + 2x - 4k + 4) \quad \cdots \textcircled{3}$$

と変形できるので、 C が下に凸の放物線になるのは x^2 の係数が正になるときて、

$$-\frac{k}{4(k-1)} > 0$$

である。両辺に $4(k-1)^2$ をかけると

$$-k(k-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow k(k-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < k < 1$$

となる。

(答) $0 < k < 1$

(4)

(1)の2定点 $(0, -1), (2, -2)$ を結ぶ直線の傾きを m とすると

$$m = \frac{-2 - (-1)}{2 - 0}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

となる。 $0 < k < 1$ のとき、③の両辺を x で微分すると

$$y' = \frac{1}{4(k-1)}(-2kx + 2)$$

$$= \frac{-kx + 1}{2(k-1)}$$

となるので、 C 上のある点 $\left(t, \frac{1}{4(k-1)}(-kt^2 + 2t - 4k + 4)\right)$ における接線の傾きは $\frac{-kt+1}{2(k-1)}$ で

あり、これが m に等しいので

$$\frac{-kt+1}{2(k-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -kt+1 = -(k-1)$$

$$\Leftrightarrow kt-k=0$$

$$\Leftrightarrow k(t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow t=1 \quad (\because 0 < k < 1)$$

を得る。よって接点は $\left(1, \frac{-5k+6}{4(k-1)}\right)$ であり、この点における接線は

$$y - \frac{-5k+6}{4(k-1)} = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{-5k+6}{4(k-1)}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{2k-2-5k+6}{4(k-1)}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{-3k+4}{4(k-1)}$$

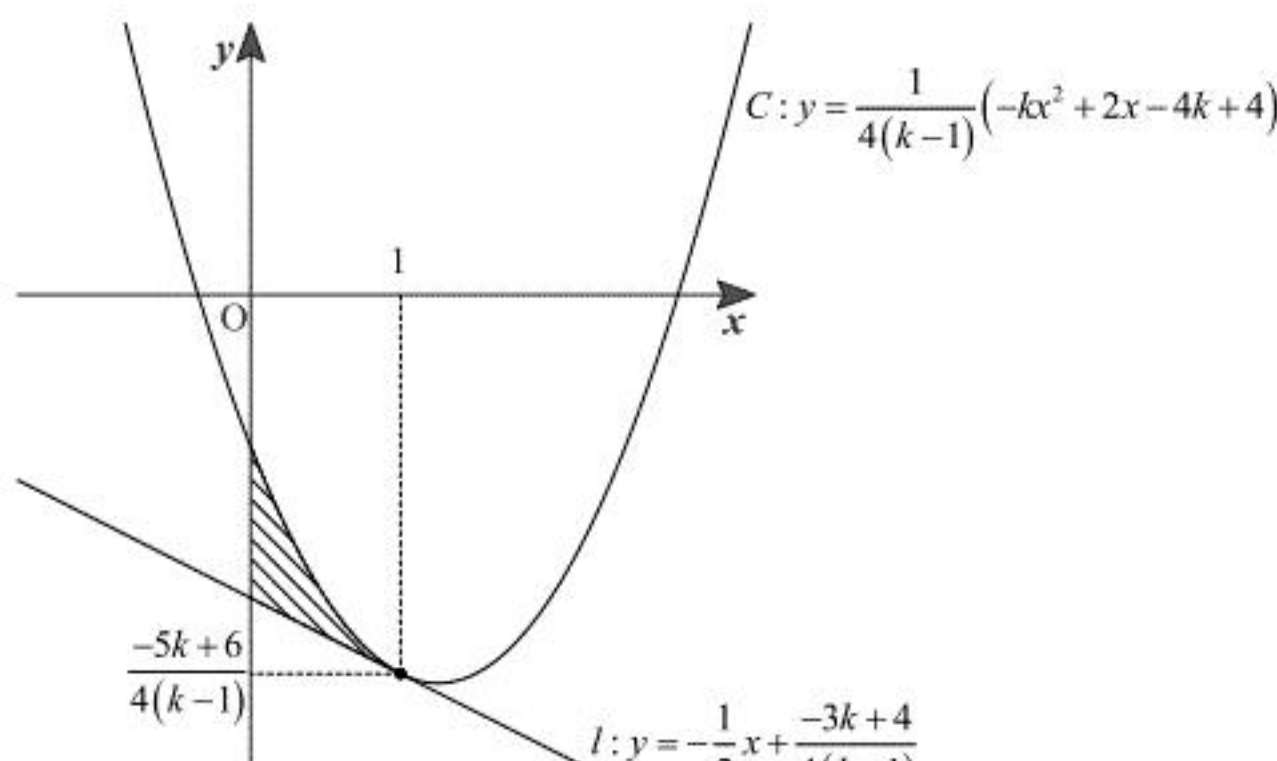
と求まる。

(答) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{-3k+4}{4(k-1)}$

(5)

直線 l の方程式は(4)より $y = -\frac{1}{2}x + \frac{-3k+4}{4(k-1)}$ であり、 C の方程式は

$y = \frac{1}{4(k-1)}(-kx^2 + 2x - 4k + 4)$ である。 l と C 、および y 軸によって囲まれた部分は下図の斜線部となる。



よって求める面積を S とすると

$$S = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{4(k-1)}(-kx^2 + 2x - 4k + 4) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{-3k+4}{4(k-1)} \right) \right\} dx$$

$$= \frac{1}{4(k-1)} \int_0^1 \{ -kx^2 + 2x - 4k + 4 + 2(k-1)x + 3k - 4 \} dx$$

$$= \frac{1}{4(k-1)} \int_0^1 (-kx^2 + 2kx - k) dx$$

$$= \frac{k}{4(k-1)} \int_0^1 (-x^2 + 2x - 1) dx$$

$$= \frac{k}{4(k-1)} \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x \right]_0^1$$

$$= \frac{k}{4(k-1)} \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1 \right)$$

$$= \frac{k}{12(1-k)}$$

と求まる。

(答) $\frac{k}{12(1-k)}$

(1)

Aさんが1点もらう事象を A_1 、Aさんが1点失う事象を A_2 、Bさんが1点もらう事象を B_1 、

Bさんが1点失う事象を B_2 とする。このときそれぞれの事象の確率は、 $P(A_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 、

$P(A_2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 、 $P(B_1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 、 $P(B_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ である。事象 A_1 が起こる回数を n 回

($n=0, 1, 2, 3, 4$)とすると、事象 A_2 が起こる回数は $(4-n)$ 回である。Aさんが4回さいころを振り終えたときに、得点が2点となるのは

$$1 \cdot n + (-1)(4-n) = 2 \\ \Leftrightarrow n = 3$$

のときである。よって求める確率は

$${}_4C_3 \{P(A_1)\}^3 \{P(A_2)\} = {}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{81}$$

となる。

(答) $\frac{8}{81}$

(2)

事象 A_1 が起こる回数を k 回($k=0, 1, 2, 3, 4$)とすると、事象 A_2 が起こる回数は $(4-k)$ 回である。また事象 B_1 が起こる回数を l 回($l=0, 1, 2, 3, 4$)とすると、事象 B_2 が起こる回数は $(4-l)$ 回である。AさんとBさんが別々にさいころを4回振り終え終えたとき、二人の得点の合計が0点となるのは

$$\{1 \cdot k + (-1)(4-k)\} + \{1 \cdot l + (-1)(4-l)\} = 0 \\ \Leftrightarrow k + l = 4 \\ \Leftrightarrow l = 4 - k$$

より、 $(k, l) = (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$ のときである。それぞれの確率は以下のようになる。

[1] $(k, l) = (0, 4)$ のとき

事象 A_1 と事象 B_1 は独立な事象なので、 $(k, l) = (0, 4)$ のときの確率は

$${}_4C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times {}_4C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{256}{6561}$$

となる。

[2] $(k, l) = (1, 3)$ のとき

事象 A_1 と事象 B_1 は独立な事象なので、 $(k, l) = (1, 3)$ のときの確率は

$${}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times {}_4C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1024}{6561}$$

となる。

[3] $(k, l) = (2, 2)$ のとき

事象 A_1 と事象 B_1 は独立な事象なので、 $(k, l) = (2, 2)$ のときの確率は

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times {}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{576}{6561}$$

となる。

[4] $(k, l) = (3, 1)$ のとき

事象 A_1 と事象 B_1 は独立な事象なので、 $(k, l) = (3, 1)$ のときの確率は

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times {}_4C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{6561}$$

となる。

[5] $(k, l) = (4, 0)$ のとき

事象 A_1 と事象 B_1 は独立な事象なので、 $(k, l) = (4, 0)$ のときの確率は

$${}_4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times {}_4C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{6561}$$

となる。

以上、[1]~[5]より、求める確率は

$$\frac{256}{6561} + \frac{1024}{6561} + \frac{576}{6561} + \frac{64}{6561} + \frac{1}{6561} = \frac{1921}{6561}$$

となる。

(答) $\frac{1921}{6561}$

(3)

さいころの1, 2の目が出る回数を x 回($x=0, 1, 2, 3, 4$)、さいころの3, 4の目が出る回数を y

回($y=0, 1, 2, 3, 4$)、さいころの5, 6の目が出る回数を z 回($z=0, 1, 2, 3, 4$)とすると、

$$x + y + z = 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立ち、また、さいころの1, 2の目が出るとき得点の合計は2点減少し、さいころの3, 4の目が出るとき得点の合計は変化せず、さいころの5, 6の目が出るとき得点の合計は2点増加するので、さいころを4回振り終え終えたとき得点の合計が0点となるのは

$$-2x + 0y + 2z = 0 \\ \Leftrightarrow z = x \quad \cdots \textcircled{2}$$

のときである。②を①に代入すると

$$2x + y = 4 \\ \therefore y = 2(2-x)$$

であるから、 $(x, y, z) = (0, 4, 0), (1, 2, 1), (2, 0, 2)$ のとき条件を満たす。それぞれの確率は以下のようになる。

[1] $(x, y, z) = (0, 4, 0)$ のとき

$(x, y, z) = (0, 4, 0)$ となるような、さいころの目の出方の順番は $\frac{4!}{0!4!0!}$ 通りなので、その

確率は

$$\frac{4!}{0!4!0!} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$$

となる。

[2] $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ のとき

$(x, y, z) = (1, 2, 1)$ となるような、さいころの目の出方の順番は $\frac{4!}{1!2!1!}$ 通りなので、その確

率は

$$\frac{4!}{1!2!1!} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{12}{81}$$

となる。

[3] $(x, y, z) = (2, 0, 2)$ のとき

$(x, y, z) = (2, 0, 2)$ となるような、さいころの目の出方の順番は $\frac{4!}{2!0!2!}$ 通りなので、その

確率は

$$\frac{4!}{2!0!2!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{81}$$

となる。

以上、[1]~[3]より、求める確率は

$$\frac{1}{81} + \frac{12}{81} + \frac{6}{81} = \frac{19}{81}$$

となる。

(答) $\frac{19}{81}$

(1)

線分 AB が直径より、円 K の中心 C は線分 AB の中点であるから、点 C の座標は

$$\left(\frac{1-1}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

と求まる。また円 K の半径は線分 AB の長さの半分であるから、

$$\frac{\sqrt{\{(-1)-1\}^2 + \{3-2\}^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

と求まる。よって、円 K は中心の座標が $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ 、半径が $\frac{\sqrt{5}}{2}$ の円なので、その方程式は

$$x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad C\left(0, \frac{5}{2}\right), \quad K: x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

(2)

l は円 K 上の点 P における接線であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} \cdot (\overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{CP}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} &= |\overrightarrow{CP}|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $|\overrightarrow{CP}|$ は円 K の半径だから、 $|\overrightarrow{CP}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ であり

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = \frac{5}{4}$$

となり、点 P や点 Q の取り方によらず一定である。

(証明終)

(答) 定数: $\frac{5}{4}$

(3)

点 A, B, C, Q は同一直線上に存在するので、 t を実数として

$$\overrightarrow{CQ} = t\overrightarrow{AB}$$

とおける。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CQ} &= t(-1-1, 3-2) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CQ} &= t(-2, 1) \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} \\ &= (a, b) - \left(0, \frac{5}{2}\right) \\ &= \left(a, b - \frac{5}{2}\right) \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

であり、(2)より $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = \frac{5}{4}$ であるから、これに②、③を代入して

$$\begin{aligned} \left(a, b - \frac{5}{2}\right) \cdot \{t(-2, 1)\} &= \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow t\left(-2a + b - \frac{5}{2}\right) &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。ここで、背理法を用いて $-2a + b - \frac{5}{2} \neq 0$ を示す。すなわち、

$$-2a + b - \frac{5}{2} = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

と仮定して矛盾を導く。点 P(a, b) は円 K 上より①を満たし、④より $b = 2a + \frac{5}{2}$ だから、

$$\begin{aligned} a^2 + \left\{\left(2a + \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2}\right\}^2 &= \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow 5a^2 &= \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow a &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得る。よって、③、④より $\overrightarrow{CP} = \pm\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ であり、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CP} &= \pm(-2, 1) \cdot \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つので、 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CP}$ となる。さらに $\overrightarrow{CP} \perp l$ より、 $\overrightarrow{AB} \parallel l$ となる。このとき直線 AB と

l は一致しないので、交点を持たず矛盾である。よって、 $-2a + b - \frac{5}{2} \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} t &= \frac{5}{4\left(-2a + b - \frac{5}{2}\right)} \\ &= \frac{5}{2(-4a + 2b - 5)} \end{aligned}$$

を得る。これを②に代入すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CQ} &= \frac{5}{2(-4a + 2b - 5)}(-2, 1) \\ &= \left(\frac{5}{4a - 2b + 5}, -\frac{5}{8a - 4b + 10}\right) \quad \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{CQ} = \left(\frac{5}{4a - 2b + 5}, -\frac{5}{8a - 4b + 10}\right)$$

(4)

点 Q の x 座標が正より、 $t < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2(-4a + 2b - 5)} < 0$ であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CQ}| &= \left|\frac{5}{2(-4a + 2b - 5)}\right| \sqrt{(-2)^2 + 1^2} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{2(4a - 2b + 5)} \end{aligned}$$

であり、また $|\overrightarrow{CP}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ であるから、 $\overrightarrow{CP}$ と $\overrightarrow{CQ}$ のなす角が $\frac{\pi}{3}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} &= |\overrightarrow{CP}| |\overrightarrow{CQ}| \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2(4a - 2b + 5)} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = \frac{5}{4}$ より

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2(4a - 2b + 5)} \cdot \frac{1}{2} &= \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow 8a - 4b + 5 &= 0 \quad \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

であり、⑥を⑤に代入して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CQ} &= \left(\frac{5}{\left(-\frac{5}{2}\right) + 5}, -\frac{5}{(-5) + 10}\right) \\ &= (2, -1) \end{aligned}$$

を得るので、 $\overrightarrow{OQ}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ} \\ &= \left(0, \frac{5}{2}\right) + (2, -1) \\ &= \left(2, \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

と求まる。次に、P(a, b) は円 K 上より①を満たすので

$$a^2 + \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad \cdots \textcircled{7}$$

であり、⑥ $\Leftrightarrow b = 2a + \frac{5}{4}$ を⑦に代入すると

$$\begin{aligned} a^2 + \left(2a - \frac{5}{4}\right)^2 &= \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow a^2 + 4a^2 - 5a + \frac{25}{16} &= \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow 16a^2 - 16a + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{8 \pm \sqrt{48}}{16} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

を得るので、これと⑥より $P\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}, \frac{9+2\sqrt{3}}{4}\right), \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}, \frac{9-2\sqrt{3}}{4}\right)$ と求まる。

$$(\text{答}) \quad Q\left(2, \frac{3}{2}\right), \quad P\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}, \frac{9+2\sqrt{3}}{4}\right), \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}, \frac{9-2\sqrt{3}}{4}\right)$$

4-I

(1)

$P(k, 0, 0)$, $Q(0, k, 0)$, $R(0, 0, 2k)$ とおく。 $k=1$ のとき, $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$, $R(0, 0, 2)$ であり, DG と PR の交点を M , FG と QR の交点を N とおくと, 平面 α による切り口の多角形の頂点は A, C, M, N となる。 $\triangle MDA$ と $\triangle MGR$ について,

$$DA = GR (=1)$$

$$\angle MDA = \angle MGR \left(= \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\angle DAM = \angle GRM \left(\because AD \parallel RG \right)$$

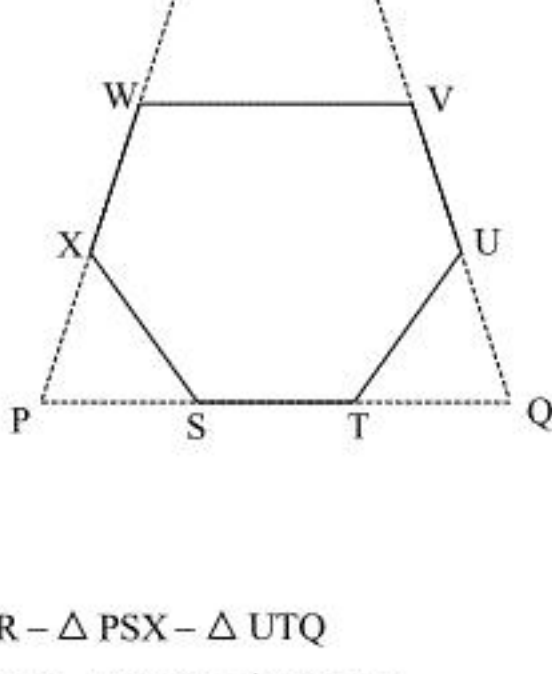
より, 1組の辺とその両端の角が等しいので $\triangle MDA \equiv \triangle MGR$ となる。 よって, $MD = MG$ となり, M は線分 DG の中点となる。 対称性より N は線分 FG の中点となる。 よって,

$$M\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), \quad N\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) \text{ と求まる。}$$

$$\text{(答)} \quad (1, 0, 0), (0, 1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$$

(2)

$1 \leq k \leq \frac{3}{2}$ のとき, AB と PQ の交点を S , BC と PQ の交点を T , CF と QR の交点を U , FG と QR の交点を V , GD と RP の交点を W , DA と RP の交点を X とおくと, 平面 α による切り口の多角形は下図のような六角形 $STUVWX$ となる。



上図より

$$S = \triangle PQR - \triangle WVR - \triangle PSX - \triangle UTQ$$

が成り立ち, 対称性より $\triangle PSX = \triangle UTQ$ であるから

$$S = \triangle PQR - \triangle WVR - 2 \triangle PSX \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。 ここで

$$PQ = \sqrt{2}k$$

$$RP = \sqrt{(2k)^2 + k^2} = \sqrt{5}k$$

であり, R から線分 PQ におろした垂線の足を H とすると,

$$RH = \sqrt{(\sqrt{5}k)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}k\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}k$$

であるから

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}k \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}k = \frac{3}{2}k^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。 ここで $\triangle PQR$ と $\triangle WVR$ について,

$$\angle QRP = \angle VRW$$

$$\angle RPQ = \angle RWV \left(\because PQ \parallel WV \right)$$

より, 2組の角が等しいので $\triangle PQR \sim \triangle WVR$ となり, 相似比は $RP:RW$ であり

$$\begin{aligned} RP:RW &= RO:RG \left(\because WG \parallel PO \right) \\ &= 2k:(2k-1) \end{aligned}$$

であるから, 面積比は $4k^2:(2k-1)^2$ となるので

$$\triangle WVR = \frac{(2k-1)^2}{4k^2} \triangle PQR \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。 次に $\triangle PQR$ と $\triangle PSX$ について,

$$\angle RPQ = \angle XPS$$

$$\angle PQR = \angle PSX \left(\because QR \parallel SX \right)$$

より, 2組の角が等しいので $\triangle PQR \sim \triangle PSX$ となり, 相似比は $PQ:PS$ であり

$$\begin{aligned} PQ:PS &= PO:PA \left(\because QO \parallel SA \right) \\ &= k:(k-1) \end{aligned}$$

であるから, 面積比は $k^2:(k-1)^2$ となるので

$$\triangle PSX = \frac{(k-1)^2}{k^2} \triangle PQR \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となる。 ①, ②, ③, ④より

$$\begin{aligned} S &= \left\{ 1 - \frac{(2k-1)^2}{4k^2} - 2 \cdot \frac{(k-1)^2}{k^2} \right\} \cdot \frac{3}{2}k^2 \\ &= \frac{3}{2} \left\{ k^2 - \frac{4k^2 - 4k + 1}{4} - 2(k^2 - 2k + 1) \right\} \\ &= \frac{3}{8} \{ 4k^2 - (4k^2 - 4k + 1) - 8(k^2 - 2k + 1) \} \\ &= \frac{3}{8} (-8k^2 + 20k - 9) \\ &= -3k^2 + \frac{15}{2}k - \frac{27}{8} \end{aligned}$$

を得る。

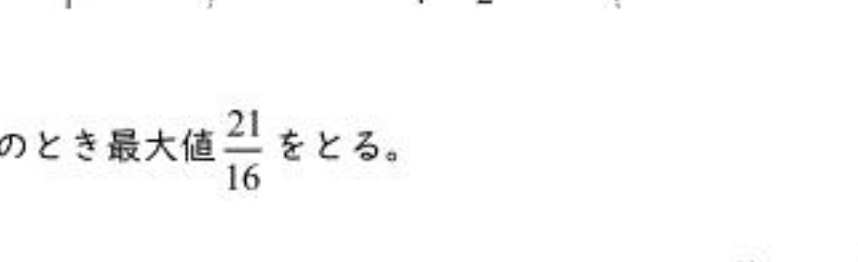
$$\text{(答)} \quad S = -3k^2 + \frac{15}{2}k - \frac{27}{8}$$

(3)

平方完成すると

$$\begin{aligned} S &= -3k^2 + \frac{15}{2}k - \frac{27}{8} \\ &= -3 \left(k - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{75}{16} - \frac{27}{8} \\ &= -3 \left(k - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{21}{16} \end{aligned}$$

と変形できるので, $1 \leq k \leq \frac{3}{2}$ のときグラフは下図のようになる。



上図より, S は $k = \frac{5}{4}$ のとき最大値 $\frac{21}{16}$ をとる。

$$\text{(答)} \quad k = \frac{5}{4} \text{ のとき最大値 } \frac{21}{16}$$

4-II

(1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2e^{3x} - 9e^{2x} + 12e^x - 4) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{3x} \left(2 - \frac{9}{e^x} + \frac{12}{e^{2x}} - \frac{4}{e^{3x}} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。 ここで $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{3x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{9}{e^x} + \frac{12}{e^{2x}} - \frac{4}{e^{3x}} \right) = 2$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

となる。 また, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{3x} - 9e^{2x} + 12e^x - 4) \\ &= -4 \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$$

(2)

$f(x) = 2e^{3x} - 9e^{2x} + 12e^x - 4$ の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6e^{3x} - 18e^{2x} + 12e^x \\ &= 6e^x (e^{2x} - 3e^x + 2) \\ &= 6e^x (e^x - 1)(e^x - 2) \end{aligned}$$

となる。 ここで $f'(x) = 0$ とすると $x = 0, \log 2$ であるから増減表は次のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	(-4)	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	(∞)

増減表より $f(x)$ は $x = 0$ で極大値

$$f(0) = 2 - 9 + 12 - 4 = 1$$

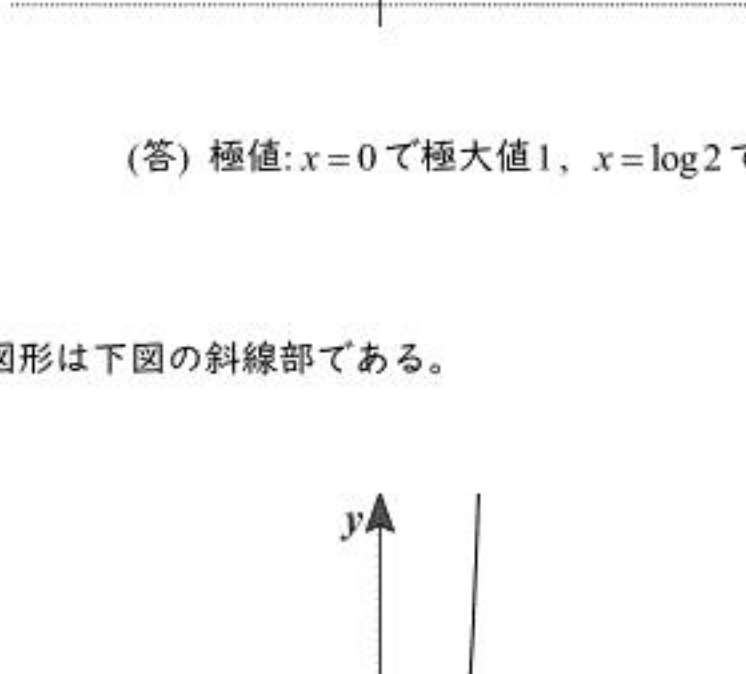
をとり, $x = \log 2$ で極小値

$$f(\log 2) = 2 \cdot 8 - 9 \cdot 4 + 12 \cdot 2 - 4 = 0$$

をとる。 さらに

$$\begin{aligned} f(x) &= 2e^{3x} - 9e^{2x} + 12e^x - 4 \\ &= 2(e^x - 2)^2 \left(e^x - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

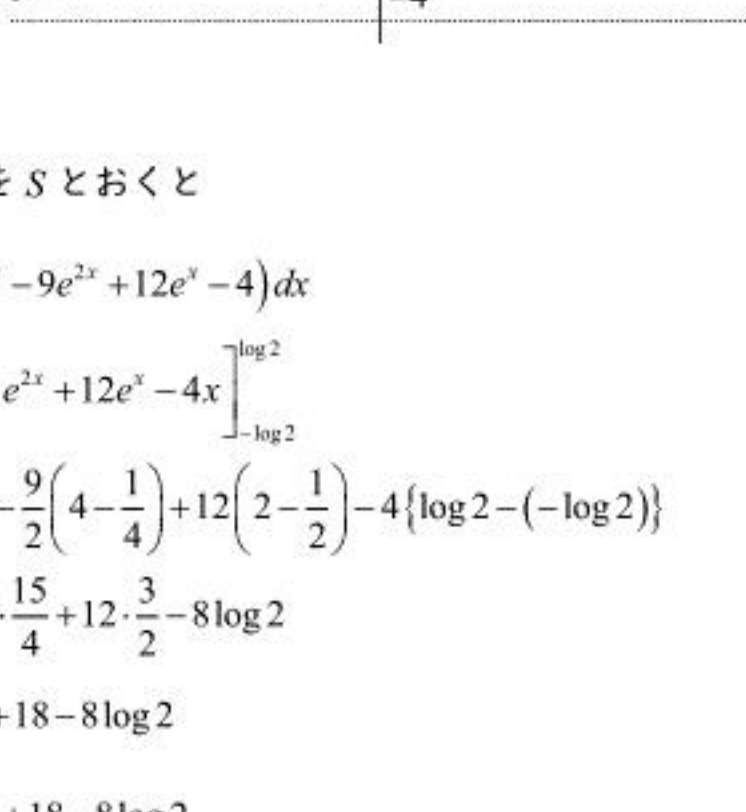
と変形できるので, $f(x) = 0$ のとき, $x = \log 2, -\log 2$ となる。 よって, C の概形は下図のようになる。



(答) 極値: $x = 0$ で極大値 1 , $x = \log 2$ で極小値 0 , C の概形: 上図

(3)

C と x 軸に囲まれた図形は下図の斜線部である。



よって, 求める面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\log 2}^{\log 2} (2e^{3x} - 9e^{2x} + 12e^x - 4) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}e^{3x} - \frac{9}{2}e^{2x} + 12e^x - 4x \right]_{-\log 2}^{\log 2} \\ &= \frac{2}{3} \left(8 - \frac{1}{8} \right) - \frac{9}{2} \left(4 - \frac{1}{4} \right) + 12 \left(2 - \frac{1}{2} \right) - 4 \{ \log 2 - (-\log 2) \} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{63}{8} - \frac{9}{2} \cdot \frac{15}{4} + 12 \cdot \frac{3}{2} - 8 \log 2 \\ &= \frac{63}{12} - \frac{135}{8} + 18 - 8 \log 2 \\ &= \frac{126 - 405}{24} + 18 - 8 \log 2 \\ &= -\frac{93}{8} + \frac{144}{8} - 8 \log 2 \\ &= \frac{51}{8} - 8 \log 2 \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \frac{51}{8} - 8 \log 2$$