

$$\int_0^2 |f(x)| dx = t$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - tx \\ &= x(x-t) \end{aligned}$$

であり、また $|f(x)| \geq 0$ より、 $t \geq 0$ である。 t の値に応じて場合分けを行う。

[1] $0 \leq t < 2$ のとき

$f(x) = 0$ となる x は $x = 0, t$ であり、

$$\begin{aligned} \int_0^2 |f(x)| dx &= \int_0^t \{-f(x)\} dx + \int_t^2 f(x) dx \\ &= -\int_0^t (x^2 - tx) dx + \int_t^2 (x^2 - tx) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}tx^2\right]_0^t + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}tx^2\right]_t^2 \\ &= \frac{1}{3}t^3 - 2t + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。 $\int_0^2 |f(x)| dx = t$ であるから、

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{3}t^3 - 2t + \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow t^3 - 9t + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t - 8) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 1, \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{-1 - \sqrt{33}}{2} < 0 \\ \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} < \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} < \frac{-1 + \sqrt{36}}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \frac{-1 - \sqrt{33}}{2} < 0 \\ 2 < \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} < \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

より、 $t = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$ は $0 \leq t < 2$ を満たさない。ゆえに $0 \leq t < 2$ で条件を満たすのは $t = 1$ のとき、すなわち $f(x) = x^2 - x$ のときである。

[2] $2 \leq t$ のとき

$f(x) = 0$ となる x は $x = 0, t$ であり、

$$\begin{aligned} \int_0^2 |f(x)| dx &= -\int_0^2 f(x) dx \\ &= -\int_0^2 (x^2 - tx) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}tx^2\right]_0^2 \\ &= 2t - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。 $\int_0^2 |f(x)| dx = t$ であるから、

$$\begin{aligned} t &= 2t - \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となり、これは $2 \leq t$ を満たす。このとき、 $f(x) = x^2 - \frac{8}{3}x$ である。

以上、[1], [2] より、条件を満たす関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = x^2 - x, f(x) = x^2 - \frac{8}{3}x$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = x^2 - x, f(x) = x^2 - \frac{8}{3}x$$

(1)

$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$ である。 $t > 0$ に注意して等式(*)の両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}|^2 + 2t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t^2|\overrightarrow{OB}|^2 &= 9\left(t^2|\overrightarrow{OA}|^2 - 2t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2\right) \\ \Leftrightarrow 1 + 2t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t^2 &= 9t^2 - 18t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 9 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \frac{2t^2 + 2}{5t} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{2t^2 + 2}{5t}$$

(2)

点A, Bは原点Oを中心とする半径1の円周上の点であるから、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ のなす角の大きさを θ ($0 \leq \theta < 2\pi$)とおくと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \theta \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

と表される。 θ の範囲より、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であるから、(1)の結果を用いて、

$$-1 \leq \frac{2t^2 + 2}{5t} \leq 1$$

となる。ここで、 $t > 0$ より、 $0 < \frac{2t^2 + 2}{5t}$ が常に成り立つ。また、

$$\begin{aligned} \frac{2t^2 + 2}{5t} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &\leq t \leq 2 \end{aligned}$$

である。よって、等式(*)を満たす点A, Bが存在するような t の値の範囲は、 $\frac{1}{2} \leq t \leq 2$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 2$$

(3)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \frac{2t^2 + 2}{5t} \\ &= \frac{2}{5} \left(t + \frac{1}{t} \right) \end{aligned}$$

であり、また $t > 0$ より $\frac{1}{t} > 0$ であるから、相加相乗平均の関係を用いて、

$$\frac{2}{5} \left(t + \frac{1}{t} \right) \geq \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}}$$

が成り立つ。等号が成立するのは、

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{t} \\ \Leftrightarrow t &= \pm 1 \end{aligned}$$

のときである。ここで(2)より、 $t = 1$ だけが $\frac{1}{2} \leq t \leq 2$ の範囲に含まれる。このとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \frac{2 \cdot 1^2 + 2}{5 \cdot 1} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

である。よって、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ は $t = 1$ のときに最小値 $\frac{4}{5}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{5}$$

(1)

数学的帰納法を利用して、すべての n に対し、

$$a_n = 4n + 1 - (-3)^n \text{ は } 8 \text{ の倍数である} \quad \cdots \textcircled{1}$$

ことを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \cdot 1 + 1 - (-3)^1 \\ &= 4 + 1 + 3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

となる。よって、 $n=1$ のとき、 a_n は 8 の倍数となり $\textcircled{1}$ が成立する。

[2] $n=k$ のときに $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} a_k &= 4k + 1 - (-3)^k \\ &= 8t \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

とおける。ただし t は整数である。 $n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4(k+1) + 1 - (-3)^{k+1} \\ &= 4k + 5 + 3 \cdot (-3)^k \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\textcircled{2}$ より $(-3)^k = 4k + 1 - 8t$ であるから、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4k + 5 + 3(4k + 1 - 8t) \\ &= 16k + 8 - 24t \\ &= 8(2k + 1 - 3t) \end{aligned}$$

となる。 k, t は整数であるから、 a_{k+1} は 8 の倍数となり $n=k+1$ のとき $\textcircled{1}$ が成立する。

以上、[1], [2] より、すべての n に対し、 $a_n = 4n + 1 - (-3)^n$ は 8 の倍数である。

(証明終)

(2)

数学的帰納法を利用して、すべての n に対し、

$$b_n = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{8}n + \frac{1}{32}\{(-3)^n - 1\} \text{ は整数である} \quad \cdots \textcircled{3}$$

ことを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{4} \cdot 1^2 - \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{32}\{(-3)^1 - 1\} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 b_1 は整数となり $\textcircled{3}$ が成立する。

[2] $n=k$ のときに $\textcircled{3}$ が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{8}k + \frac{1}{32}\{(-3)^k - 1\} = s \quad \cdots \textcircled{4}$$

と表される。ただし s は整数である。 $n=k+1$ のとき、

$$b_{k+1} = \frac{1}{4}(k+1)^2 - \frac{1}{8}(k+1) + \frac{1}{32}\{(-3)^{k+1} - 1\}$$

となる。ここで、 $\textcircled{4}$ より $(-3)^k = -8k^2 + 4k + 1 + 32s$ であるから、

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= \frac{1}{4}(k+1)^2 - \frac{1}{8}(k+1) + \frac{1}{32}\{-3 \cdot (-8k^2 + 4k + 1 + 32s) - 1\} \\ &= \frac{1}{4}(k^2 + 2k + 1) - \frac{1}{8}(k+1) + \frac{3}{4}k^2 - \frac{3}{8}k - \frac{1}{8} - 3s \\ &= k^2 - 3s \end{aligned}$$

となる。 k, s は整数であるから、 b_{k+1} は整数となり $n=k+1$ のとき $\textcircled{3}$ が成立する。

以上、[1], [2] より、すべての n に対し、 $b_n = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{8}n + \frac{1}{32}\{(-3)^n - 1\}$ は整数である。

(証明終)

(1)

10枚のカードの中から同時に3枚取り出すとき、その取り出し方は、 ${}_{10}C_3$ 通りである。そのうち、10が書かれたカードを取り出す組み合わせは、残り9枚から2枚取り出せばよいから、 ${}_9C_2$ 通りである。よって、その確率は

$$\frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{3}{10}$$

である。

(答) $\frac{3}{10}$

(2)

5が書かれたカードを取り出し、かつ取り出した3枚のカードに書かれた数の積が10の倍数となるのは、残り2枚の内少なくとも1枚が偶数であるときである。5以外の2枚の取り出し方について、9枚の中から2枚を取り出す組み合わせは ${}_9C_2$ 通り、9枚の中から奇数が書かれたカードを2枚取り出す組み合わせは、 ${}_4C_2$ 通りあるから、少なくとも1枚が偶数である組み合わせは、 ${}_9C_2 - {}_4C_2 = 30$ 通りである。よって、その確率は

$$\frac{30}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}$

(3)

(2)より、取り出した3枚のカードに5が含まれる組み合わせは30通りである。取り出した3枚のカードに5が含まれないとき、数の積が10の倍数になるのは、10が書かれたカードを取り出すときである。その組み合わせは、1~4, 6~9から2枚選べばよいから、 ${}_8C_2 = 28$ 通りである。よって、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{30+28}{{}_{10}C_3} &= \frac{58}{120} \\ &= \frac{29}{60} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{29}{60}$

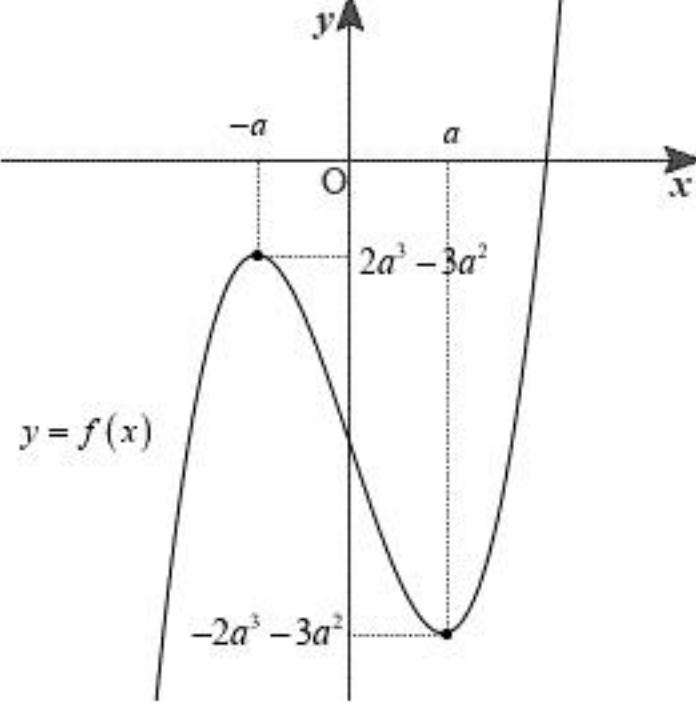
(1)

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

より、 $f'(x) = 0$ となるのは $x = \pm a$ である。このとき、 $a > 0$ に注意して $y = f(x)$ の増減表は下ようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3 - 3a^2$	$\searrow$	$-2a^3 - 3a^2$	$\nearrow$

増減表より、 $y = f(x)$ のグラフは下ようになる。



図より、 $f(x)$ が極大値をとるのは $x = -a$ のときであり、 $f(-a) = 2a^3 - 3a^2$ である。関数 $f(x)$ の値が $f(x)$ の極大値と等しくなるとき、1つの解は $x = -a$ であるから、

$$\begin{aligned} x^3 - 3a^2x - 3a^2 &= 2a^3 - 3a^2 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x - 2a^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+a)(x^2 - ax - 2a^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+a)^2(x-2a) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -a, 2a \end{aligned}$$

である。

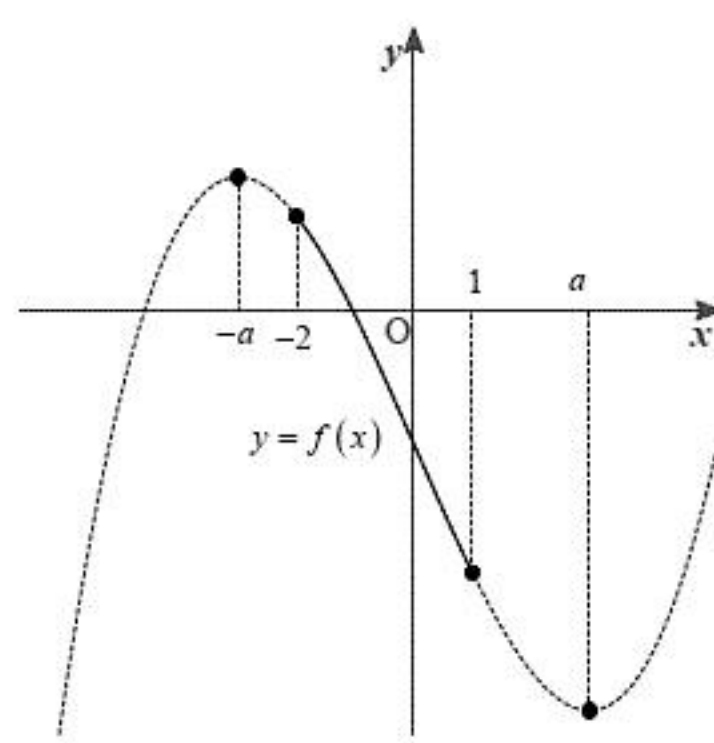
(答) $x = -a, 2a$

(2)

a の値に応じて場合分けを行う。

[1] $-a \leq -2$ すなわち $a \geq 2$ のとき

この範囲において、グラフは下ようになる。



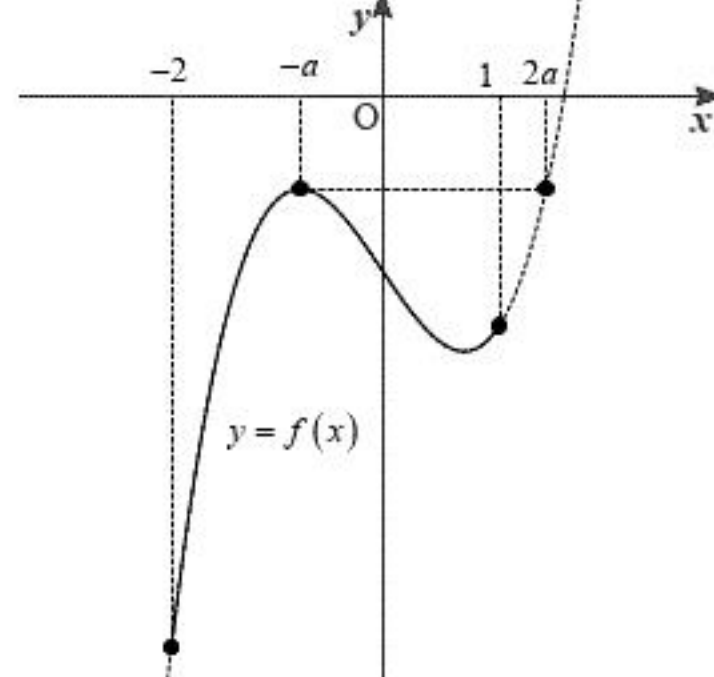
図より、 $f(x)$ が最大となるのは $x = -2$ のときである。よって、

$$\begin{aligned} p(a) &= f(-2) \\ &= 3a^2 - 8 \end{aligned}$$

である。

[2] $-a > -2$ かつ $2a \geq 1$ 、すなわち $\frac{1}{2} \leq a < 2$ のとき

この範囲において、グラフは下ようになる。



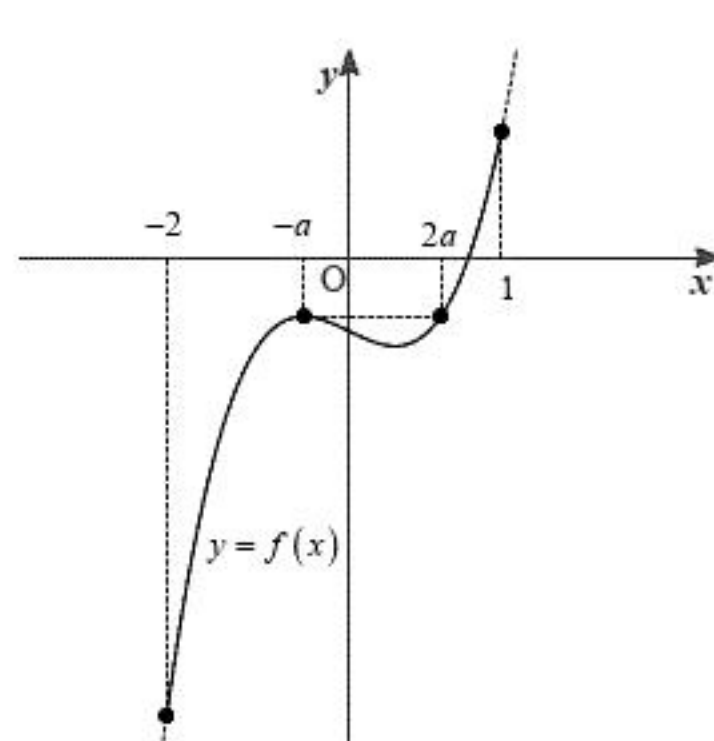
図より、 $f(x)$ が最大となるのは $x = -a$ のときである。よって、

$$\begin{aligned} p(a) &= f(-a) \\ &= 2a^3 - 3a^2 \end{aligned}$$

である。

[3] $2a < 1$ すなわち $a < \frac{1}{2}$ のとき

この範囲において、グラフは下ようになる。



図より、 $f(x)$ が最大となるのは $x = 1$ のときである。よって、

$$\begin{aligned} p(a) &= f(1) \\ &= -6a^2 + 1 \end{aligned}$$

である。

以上、[1], [2], [3]より、 $p(a)$ は下ようになる。

$$p(a) = \begin{cases} -6a^2 + 1 & (0 < a < \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ 2a^3 - 3a^2 & (\frac{1}{2} \leq a < 2 \text{ のとき}) \\ 3a^2 - 8 & (2 \leq a \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$(答) p(a) = \begin{cases} -6a^2 + 1 & (0 < a < \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ 2a^3 - 3a^2 & (\frac{1}{2} \leq a < 2 \text{ のとき}) \\ 3a^2 - 8 & (2 \leq a \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3)

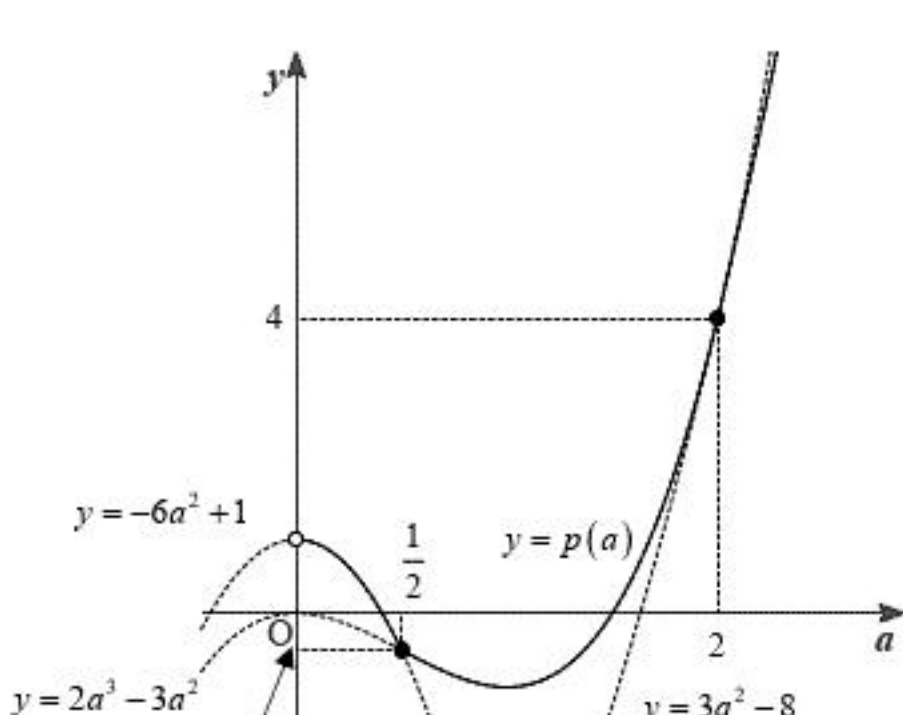
(2)の結果のうち、 $\frac{1}{2} \leq a < 2$ のときについて、

$$\begin{aligned} p'(a) &= 6a^2 - 6a \\ &= 6a(a-1) \end{aligned}$$

より、 a の範囲に注意して、 $p'(a) = 0$ となるのは $a = 1$ である。このとき、 $y = p(a)$ の $\frac{1}{2} \leq a < 2$ における増減表は下ようになる。

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	(-2)
$p'(a)$		$-$	0	$+$	
$p(a)$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	(4)

以上より、 $y = p(a)$ のグラフを描くと、下の実線ようになる。



(答) 上図