

(1)

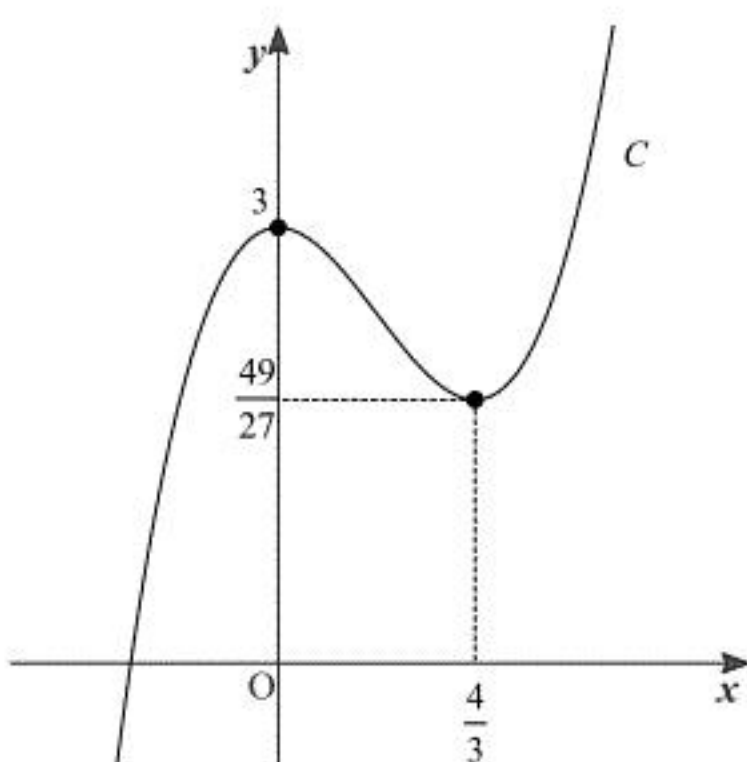
$$f'(x) = 3x^2 - 4x = 3x \left(x - \frac{4}{3} \right)$$

より、 $f'(x) = 0$ となる x は $x = 0, \frac{4}{3}$ である。このとき、 $y = f(x)$ のグラフの増減表は下のようになる。

x	...	0	...	$\frac{4}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{49}{27}$	$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ は $x = 0$ で極大値 3、 $x = \frac{4}{3}$ で極小値 $\frac{49}{27}$ をとる。また、増減表より

$C: y = f(x)$ のグラフの概形は下のようになる。



(答) $x = 0$ のとき極大値 3、 $x = \frac{4}{3}$ のとき極小値 $\frac{49}{27}$ ，グラフの概形は前図

(2)

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

より、点 $P(a, f(a))$ における C の接線 ℓ の傾きは、 $3a^2 - 4a$ である。よって、 ℓ は

$$y = (3a^2 - 4a)x - 2a^3 + 2a^2 + 3$$

である。 ℓ と C の共有点の x 座標を t とおくと、

$$\begin{aligned} f(t) &= (3a^2 - 4a)t - 2a^3 + 2a^2 + 3 \\ \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + 3 &= (3a^2 - 4a)t - 2a^3 + 2a^2 + 3 \end{aligned}$$

が成り立つ。この等式について、 $t = a$ は解の一つであるから、

$$\begin{aligned} t^3 - 2t^2 - (3a^2 - 4a)t + 2a^3 - 2a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - a) \{ t^2 + (a - 2)t - (2a^2 - 2a) \} &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - a)^2 \{ t - (-2a + 2) \} &= 0 \\ \Leftrightarrow t = a, -2a + 2 \end{aligned}$$

と変形できる。 ℓ と C の共有点が P のみになるとき、 t の値がただ 1 つに定まればよいから、

$$\begin{aligned} a &= -2a + 2 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

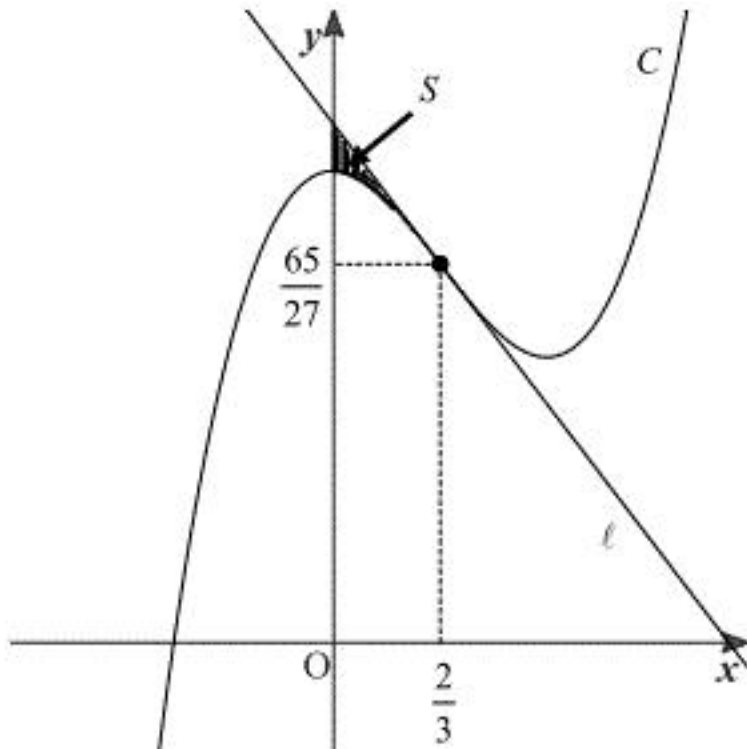
(答) $a = \frac{2}{3}$

(3)

(2) のとき、

$$\ell: y = -\frac{4}{3}x + \frac{89}{27}$$

であり、共有点の x 座標は $x = \frac{2}{3}$ である。よって、 C と ℓ のグラフは下のようになり、 C と ℓ および y 軸で囲まれた領域は下図の斜線部である。



図より、斜線部の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left\{ \left(-\frac{4}{3}x + \frac{89}{27} \right) - (x^3 - 2x^2 + 3) \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left\{ -\left(x - \frac{2}{3} \right)^3 \right\} dx \\ &= - \left[\frac{1}{4} \left(x - \frac{2}{3} \right)^4 \right]_0^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{4}{81} \end{aligned}$$

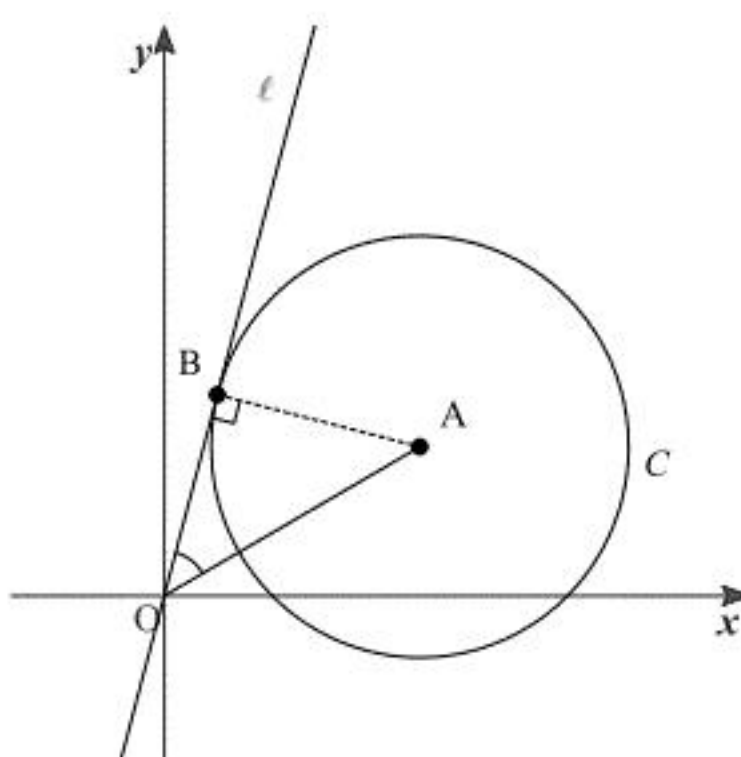
である。

(答) $\frac{4}{81}$

(1)

$$C: (x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 2$$

である。ℓとCが接するとき、ℓとCの位置関係は下ようになる。



このとき、 $OA = 2$, $AB = \sqrt{2}$, $\angle ABO = \frac{\pi}{2}$ より、

$$\begin{aligned} OB &= \sqrt{OA^2 - AB^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。よって $\triangle OAB$ は $BO = BA$ の直角二等辺三角形であるから、 $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \cos \angle AOB &= \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2)

(1)および図より、ℓとCが共有点を持つのは、ℓとOAのなす角が $\frac{\pi}{4}$ 以下であるときであ

る。 $\overrightarrow{OA} = (\sqrt{3}, 1)$ より、OAがx軸となす角度は $\frac{\pi}{6}$ であるから、

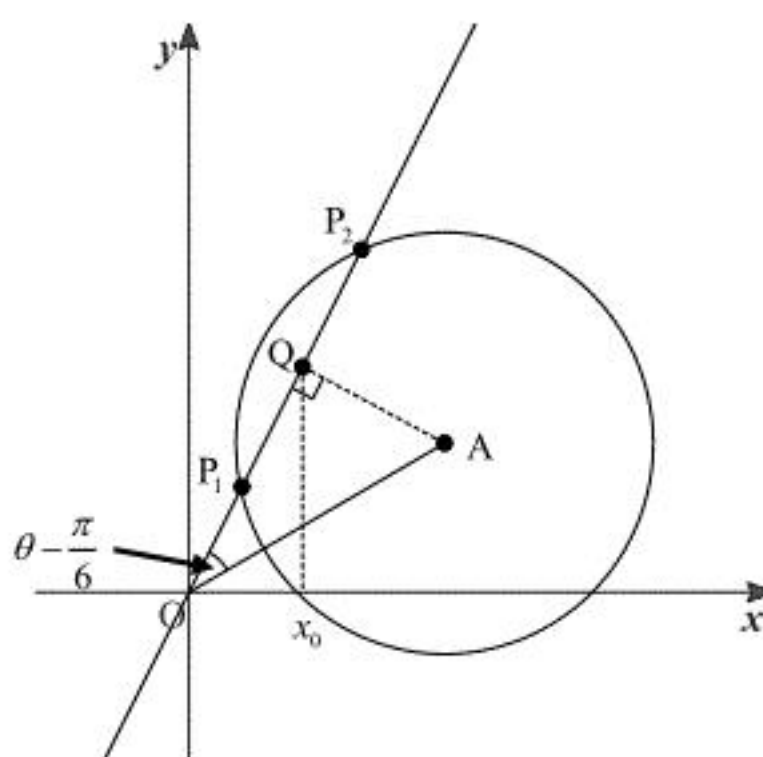
$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5}{12}\pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad -\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5}{12}\pi$$

(3)



各点の位置関係は上図のようにになる。図より、

$$\begin{aligned} OQ &= OA \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} x_0 &= OQ \cos \theta \\ &= 2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \cos \theta \\ &= \cos \left(2\theta - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) \\ &= \sin \left\{ \frac{\pi}{2} + \left(2\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right\} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。よって、 $a = 1$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ である。

$$(\text{答}) \quad a = 1, b = \frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha = \frac{\pi}{3}$$

(4)

(3)について、 $-\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5}{12}\pi$ より、 $\frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7}{6}\pi$ であるから、

$$-\frac{1}{2} \leq \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$$

である。よって、(3)における x_0 の範囲は

$$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \leq x_0 \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であり、 x_0 は、 $2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ 、すなわち $\theta = \frac{\pi}{12}$ のときに最大値 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{12} \text{ のとき } 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1)

それぞれ代入すると

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= -x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1} + 5 \\
&= -(-x_n - \sqrt{3}y_n + 5) - \sqrt{3}(\sqrt{3}x_n - y_n + \sqrt{3}) + 5 \\
&= -2x_n + 2\sqrt{3}y_n - 3 \\
y_{n+2} &= \sqrt{3}x_{n+1} - y_{n+1} + \sqrt{3} \\
&= \sqrt{3}(-x_n - \sqrt{3}y_n + 5) - (\sqrt{3}x_n - y_n + \sqrt{3}) + \sqrt{3} \\
&= -2\sqrt{3}x_n - 2y_n + 5\sqrt{3} \\
x_{n+3} &= -x_{n+2} - \sqrt{3}y_{n+2} + 5 \\
&= -(-2x_n + 2\sqrt{3}y_n - 3) - \sqrt{3}(-2\sqrt{3}x_n - 2y_n + 5\sqrt{3}) + 5 \\
&= 8x_n - 7 \\
y_{n+3} &= \sqrt{3}x_{n+2} - y_{n+2} + \sqrt{3} \\
&= \sqrt{3}(-2x_n + 2\sqrt{3}y_n - 3) - (-2\sqrt{3}x_n - 2y_n + 5\sqrt{3}) + \sqrt{3} \\
&= 8y_n - 7\sqrt{3}
\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} x_{n+2} = -2x_n + 2\sqrt{3}y_n - 3 \\ y_{n+2} = -2\sqrt{3}x_n - 2y_n + 5\sqrt{3} \\ x_{n+3} = 8x_n - 7 \\ y_{n+3} = 8y_n - 7\sqrt{3} \end{cases}$$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned}
x_{3(k+1)} &= 8x_{3k} - 7 \\
\Leftrightarrow x_{3(k+1)} - 1 &= 8(x_{3k} - 1) \\
\Leftrightarrow x_{3k} &= 8^k(x_0 - 1) + 1
\end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned}
y_{3(k+1)} &= 8y_{3k} - 7\sqrt{3} \\
\Leftrightarrow y_{3(k+1)} - \sqrt{3} &= 8(y_{3k} - \sqrt{3}) \\
\Leftrightarrow y_{3k} &= 8^k(y_0 - \sqrt{3}) + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} x_{3k} = 8^k(x_0 - 1) + 1 \\ y_{3k} = 8^k(y_0 - \sqrt{3}) + \sqrt{3} \end{cases}$$

(3)

 $x_0 = y_0 = 0$ のとき, (2)の結果より

$$\begin{aligned}
x_{3k} &= -8^k + 1 \\
y_{3k} &= -\sqrt{3} \cdot 8^k + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

である。よって,

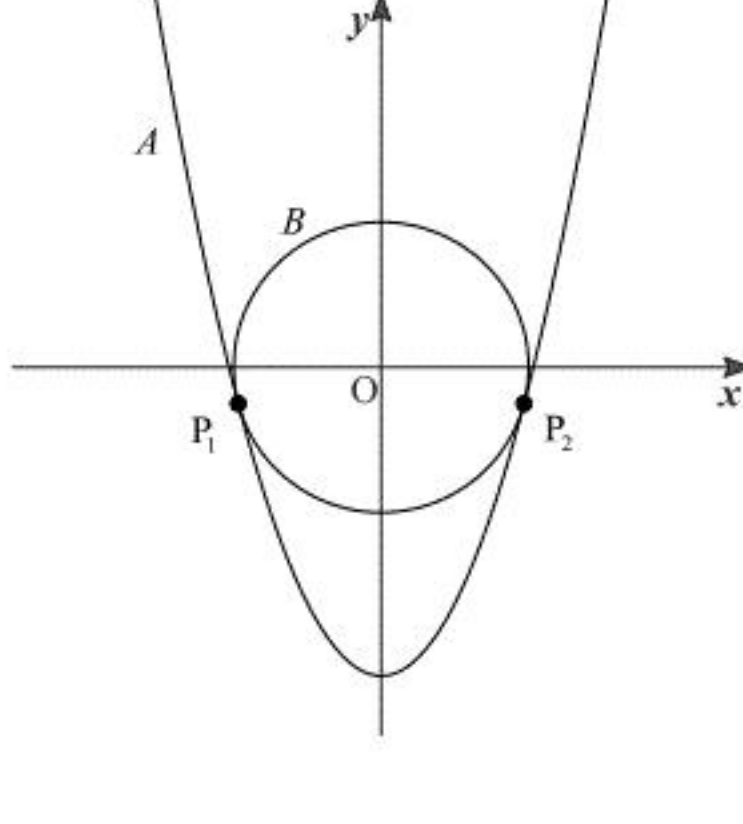
$$\begin{aligned}
x_{3k+1} &= -x_{3k} - \sqrt{3}y_{3k} + 5 \\
&= -(-8^k + 1) - \sqrt{3}(-\sqrt{3} \cdot 8^k + \sqrt{3}) + 5 \\
&= 4 \cdot 8^k + 1 \\
y_{3k+1} &= \sqrt{3}x_{3k} - y_{3k} + \sqrt{3} \\
&= \sqrt{3}(-8^k + 1) - (-\sqrt{3} \cdot 8^k + \sqrt{3}) + \sqrt{3} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} x_{3k+1} = 4 \cdot 8^k + 1 \\ y_{3k+1} = \sqrt{3} \end{cases}$$

4 - I

(1)



A と B の共有点の座標は、

$$\begin{cases} y = x^2 - a \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

の連立方程式の解である。 y についてまとめると、

$$y^2 + y + (a - r^2) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となるが、図より P_1, P_2 の y 座標は一致するから、この方程式は重解を持つ。判別式を D と

おくと、 $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a - r^2) = 1 - 4(a - r^2)$ であるから、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= r^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。①に代入すると、

$$y^2 + y + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

であるから、

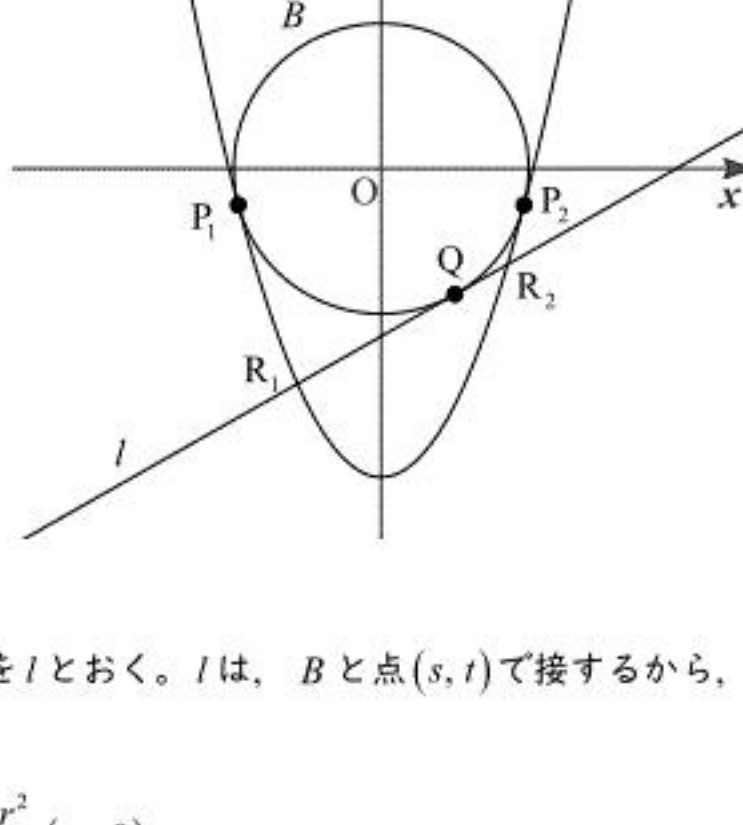
$$x^2 = r^2 - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}$$

である。よって、 $P_1\left(-\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}, -\frac{1}{2}\right), P_2\left(\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}, -\frac{1}{2}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad P_1\left(-\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}, -\frac{1}{2}\right), P_2\left(\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}, -\frac{1}{2}\right), a = r^2 + \frac{1}{4}$$

(2)



Q における B の接線を l とおく。 l は、 B と点 (s, t) で接するから、 $t \neq 0$ より

$$\begin{aligned} sx + ty &= r^2 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{s}{t}x + \frac{r^2}{t} \quad (t \neq 0) \end{aligned}$$

と表される。 A と l の交点の x 座標を α, β とおく ($\alpha \leq \beta$)。このとき、

$$x^2 - a = -\frac{s}{t}x + \frac{r^2}{t}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{s}{t}x - \frac{r^2}{t} - a = 0$$

であるから、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = -\frac{s}{t}$$

$$\alpha\beta = -\frac{r^2}{t} - a$$

である。また、 $R_1(\alpha, \alpha^2 - a), R_2(\beta, \beta^2 - a)$ より、

$$\begin{aligned} d^2 &= (\beta - \alpha)^2 + \left\{ (\beta^2 - a) - (\alpha^2 - a) \right\}^2 \\ &= \left\{ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \right\} + \left\{ (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 \right\} \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta + \left\{ (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \right\}^2 - 4\alpha^2\beta^2 \\ &= (\alpha + \beta)^4 + (1 - 4\alpha\beta)(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \left\{ (\alpha + \beta)^2 + 1 \right\} \left\{ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \right\} \\ &= \left(\frac{s^2}{t^2} + 1 \right) \left\{ \frac{s^2}{t^2} + 4 \left(\frac{r^2}{t} + a \right) \right\} \end{aligned}$$

である。 $s^2 = r^2 - t^2, a = r^2 + \frac{1}{4}$ を代入して、

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{r^2}{t^2} \left(\frac{4r^2}{t} + 4r^2 + \frac{r^2}{t^2} \right) \\ &= \frac{r^4}{t^4} \cdot (2t + 1)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $r > 0, t \leq -\frac{1}{2}$ であるから、

$$d = -\frac{r^2(2t + 1)}{t^2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad d = -\frac{r^2(2t + 1)}{t^2}$$

(3)

$$f(t) = -\frac{r^2(2t + 1)}{t^2}$$

とおく。このとき、

$$f(t) = -r^2 \left\{ \left(\frac{1}{t} + 1 \right)^2 - 1 \right\}$$

である。また、 $\frac{1}{t}$ の範囲について、 $-r \leq t \leq -\frac{1}{2}$ より、 $-2 \leq \frac{1}{t} \leq -\frac{1}{r}$ である。ここで、 $-\frac{1}{r}$ の値に応じて場合分けを行う。

[1] $-2 < -\frac{1}{r} < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < r < 1$ のとき

$f(t)$ は $t = -r$ で最大値 $2r - 1$ をとる。

[2] $-1 \leq -\frac{1}{r} \Leftrightarrow r \geq 1$ のとき

$f(t)$ は $t = -1$ で最大値 r^2 をとる。

以上、[1], [2] より、 d は $\frac{1}{2} < r < 1$ のとき $2r - 1, 1 \leq r$ のとき r^2 がそれぞれ最大値である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} < r < 1 \text{ のとき } 2r - 1, 1 \leq r \text{ のとき } r^2$$

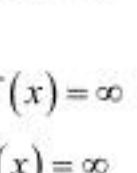
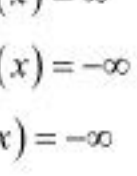
4 - II

(1)

$f(x) = \frac{x}{1-x} - \log(x+1)$ より、 x の範囲は真数条件を考えて、 $-1 < x < 1, 1 < x$ である。また、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-x) + x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{(1+x) - (1-x)^2}{(1-x)^2(1+x)} \\ &= \frac{-x(x-3)}{(1-x)^2(1+x)} \end{aligned}$$

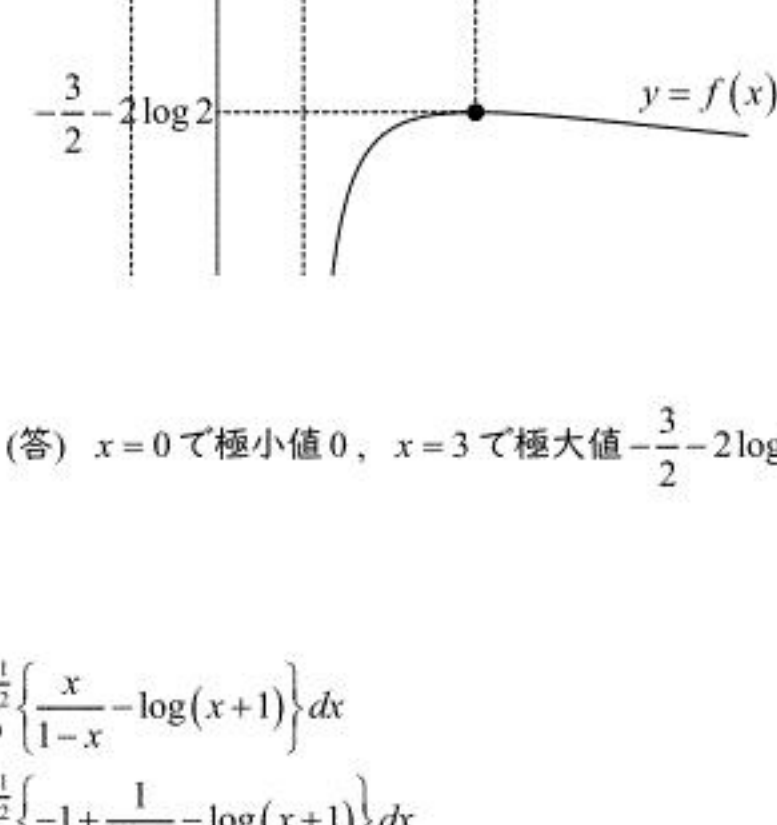
である。 $f'(x) = 0$ であるとき、 $x = 0, 3$ である。このとき、 $f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$			0				$-\frac{3}{2} - 2\log 2$	

表より、 $y = f(x)$ は $x = 0$ で極小値 $0, x = 3$ で極大値 $-\frac{3}{2} - 2\log 2$ をとる。また、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

である。以上より、グラフの概形は下のようになる。



$$(\text{答}) \quad x = 0 \text{ で極小値 } 0, x = 3 \text{ で極大値 } -\frac{3}{2} - 2\log 2, \text{ グラフの概形は前図}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{x}{1-x} - \log(x+1) \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ -1 + \frac{1}{1-x} - \log(x+1) \right\} dx \\ &= \left[-x - \log(1-x) - (x+1) \log(x+1) + (x+1) \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{2} - \log \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \log \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) - 1 \\ &= \frac{5}{2} \log 2 - \frac{3}{2} \log 3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{2} \log 2 - \frac{3}{2} \log 3$$