数　　学 (120分)

(平成31年度 海洋生命科学部・海洋資源環境学部 前期日程)

注 意 事 項

問 題 冊 子	解 答 用 紙
1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけない。 2. 問題冊子は全部で10ページである。表紙を開くと白紙があり，その裏が1ページ目である。不鮮明な印刷，ページの脱落に気付いたときは，試験監督者に申し出ること。 3. 問題冊子は持ち帰ること。	1. すべての解答用紙に受験番号，氏名を記入すること。記入を忘れたとき，あるいは誤った番号を記入したときは失格となることがある。 2. 解答用紙の枚数は，5枚である。 3. 解答は，指定された箇所に記入すること。なお，解答は答えだけでなく途中の計算も記入すること。

$\boxed{1}$ 等式

$$f(x) = x^2 - x\int_0^2 |f(x)|dx$$

を満たす関数 $f(x)$ をすべて求めよ．

(配点：50 点)

注意：以下の余白および右ページは計算用である．解答は解答用紙に記入せよ．

$\boxed{2}$ 平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周上に点 A, B がある．正の数 t に対し，等式

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 3\,|t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}| \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(配点：50 点)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を t を用いて表せ．

(2) 等式 $(*)$ を満たす点 A, B が存在するような t の値の範囲を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の最小値を求めよ．

注意：以下の余白および右ページは計算用である．解答は解答用紙に記入せよ．

$\boxed{3}$ n を自然数とするとき，次の問いに答えよ．

(配点：50 点)

(1) すべての n に対し，$a_n = 4n + 1 - (-3)^n$ は 8 の倍数であることを示せ．

(2) すべての n に対し，$b_n = \dfrac{1}{4}n^2 - \dfrac{1}{8}n + \dfrac{1}{32}\{(-3)^n - 1\}$ は整数であることを示せ．

注意：以下の余白および右ページは計算用である．解答は解答用紙に記入せよ．

4　1から10までの整数が1つずつ書かれた10枚のカードがある．この中から同時に3枚取り出すとき，次の問いに答えよ．

(配点：50点)

(1) 10が書かれたカードを取り出す確率を求めよ．

(2) 5が書かれたカードを取り出し，かつ取り出した3枚のカードに書かれた数の積が10の倍数になる確率を求めよ．

(3) 取り出した3枚のカードに書かれた数の積が10の倍数になる確率を求めよ．

注意：以下の余白および右ページは計算用である．解答は解答用紙に記入せよ．

$\boxed{5}$ aを正の定数とし，関数$f(x)$を$f(x)=x^3-3a^2(x+1)$と定めるとき，次の問いに答えよ．

(配点：50点)

(1) 関数$f(x)$の値が$f(x)$の極大値に等しくなるようなxをすべて求めよ．ただしxはaを用いて表せ．

(2) 区間$-2 \leqq x \leqq 1$における$f(x)$の最大値を$p(a)$とするとき，$p(a)$をaを用いて表せ．

(3) 横軸をa，縦軸をyとする平面上に$y=p(a)$のグラフをかけ．

注意：以下の余白および右ページは計算用である．解答は解答用紙に記入せよ．