

1

行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。ただし $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

〔1〕 A^2 を計算して、 $A^2 = pA$ をみたす実数 p を求めよ。

〔2〕 各自然数 n に対して、適当な実数 a_n を定めると

$$(E + A)^n = E + a_n A$$

と表すことができる。このことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

〔3〕 〔2〕で得られた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2 平面上に三角形 OAB があり、点 P が

$$\overrightarrow{OP} + x\overrightarrow{AP} + (2 - 3x)\overrightarrow{BP} = \vec{0} \quad (0 \leq x \leq \frac{2}{3})$$

をみたすとき、次の問いに答えよ。

〔1〕 $\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$ と表したとき、 r, s を x を用いて表せ。

〔2〕 $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ をみたすすべての x について $ar + bs = 1$ が成り立つような定数 a, b の値を求めよ。

〔3〕 x が $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ の範囲を動くとき、 r のとりうる値の範囲を求めよ。

〔4〕 x が $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ の範囲を動くとき、点 P の描く軌跡を求め、図示せよ。

3 O を原点とする xy 平面上を動く点 Q の座標 (x, y) が、実数 t の関数として

$$x = \cos t, \quad y = \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t$$

で表されるとき、次の問いに答えよ。

[1] $0 \leq t \leq \pi$ における y の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

[2] $0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき、点 Q を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を R とし、三角形 OQR の面積を F とする。 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ において F の最大値を与える t の値を t_0 とするとき、 $\cos t_0$ の値を求めよ。

[3] t が $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき点 Q の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸、および y 軸によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

4 関数 $y = \log(1-x)$ のグラフを C とするとき、次の問いに答えよ。

[1] C 上の点 $(u, \log(1-u))$ ($u < 1$) における接線 ℓ の方程式を求めよ。

[2] $0 < u < 1$ のとき、[1]で求めた接線 ℓ と直線 $x = 1$ ，および x 軸によって囲まれた部分の面積 $S(u)$ を求めよ。

[3] $0 < u < 1$ における $S(u)$ の最大値と、そのときの u の値を求めよ。