

1 次の問いに答えよ。

[1] $O(0, 0)$ を原点とする xy 平面に2点 $A(1, 2 \sin \theta)$, $B(1, -2 \cos \theta)$ がある。2つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ が直交しているとき、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の大きさ $|\overrightarrow{OA}|$ を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とする。

[2] 行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$ が

$$AB + 2E = BA + 2B$$

を満たすとき、 p , q を求めよ。

[3] [2]で求めた行列 B に対して、 B^{100} を求めよ。

2 $|z| \neq 1$ である複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数)に対して、 $w = \frac{z+i}{z-i}$ とおく。ただし、 i は虚数単位である。このとき、次の問いに答えよ。

[1] w の実部を u 、虚部を v とすると、 $\frac{v}{u}$ を x と y を用いて表せ。

[2] $w = u + vi$ が $|u| = |v|$ を満たすとき、 z の表す点が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

[3] z が $z + \bar{z}i = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$ を満たすとき、 $\frac{v}{u}$ を x を用いて表したものを $g(x)$ とする。このとき、 $g(x)$ を求めよ。ただし、 $\bar{z}$ は z と共役な複素数を表す。

[4] [3]で求めた $g(x)$ の最大値とそのときの x の値、および最小値とそのときの x の値を求めよ。

3 曲線 $C: y = e^{2x}$ 上の点 $P(t, e^{2t})$ における接線が y 軸と交わる点を $Q(0, a)$ とし、 C の P における法線が x 軸と交わる点を $R(b, 0)$ とする。ただし、 e は自然対数の底とする。このとき、次の問いに答えよ。

[1] Q の y 座標 a 、 R の x 座標 b を求めよ。

[2] $t > 0$ のとき、比 $\frac{PQ}{PR}$ を t を用いて表したものを $h(t)$ とおく。区間 $t > 0$ における $h(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。

[3] [2] で求めた $h(t)$ に対して、 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h\left(\frac{n+k}{n}\right)$ を求めよ。

4 関数 $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(x^4 + 2)^3}}$ について、次の問いに答えよ。

[1] $R = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ。

[2] $f(x)$ の極値を求めよ。

[3] 定積分 $S = \int_0^1 xf(x) dx$ を求めよ。

[4] $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) の表す曲線と直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{9}$ および y 軸とで囲まれた部分を、 y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。