

[1] (1)

2つのベクトル $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ は直線 OA に関して対称であるから、定数 s を用いて

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA}$$

となる。この式を変形すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= s\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \\ &= s\vec{a} - \vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また、2つのベクトル $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ の大きさは等しいため、

$$|\overrightarrow{OC}| = 3$$

となる。したがって、①の右辺を二乗すると、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OC}|^2 &= s^2 |\vec{a}|^2 - 2s\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 4s^2 - 10s + 9 \\ &= 3^2 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4s^2 - 10s = 0$$

$$\Leftrightarrow 2s(2s - 5) = 0$$

$$\therefore s = 0, \frac{5}{2}$$

となる。 $s = 0$ のとき、 $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB}$ すなわち $\angle BOC = 180^\circ$ となるため、 $\angle AOB = 90^\circ$ である。したがって $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ となり条件 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 5$ に反するため不適である。 $s = \frac{5}{2}$ のとき、

$$\overrightarrow{OC} = \frac{5}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

となり、条件 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 5$ を満たす。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{5}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

[2]

点 E は直線 OC 上にあるため、定数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= t\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{5}{2}t\vec{a} - t\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。点 E は直線 AB 上にあり $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ と表わせるため、定数 r を用いて

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}t\vec{a} - t\vec{b} &= \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (1-r)\vec{a} + r\vec{b}\end{aligned}$$

となる。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は大きさが 0 ではなく、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ より $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行ではない。したがって $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立である。したがって、

$$\begin{cases} \frac{5}{2}t = 1 - r \\ -t = r \end{cases}$$

となるから、これを計算し、

$$t = \frac{2}{3}, r = -\frac{2}{3}$$

となる。これを②に代入して、

$$\overrightarrow{OE} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OE} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$$

[3]

直線 OD は $\angle AOB$ の二等分線であり点 D は線分 AB 上にあるため、

$$AD:DB = OA:OB = |\overrightarrow{OA}|:|\overrightarrow{OB}| = 2:3$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{2+3} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OD} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

[2]

$\triangle OAD$ と $\triangle OAE$ の底辺をそれぞれ AD , AE とみなすと高さが等しいため、

$$S:T = AD:AE = |\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{AE}|$$

となる。 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ の大きさはそれぞれ、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AD}| &= |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}| = \left| \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} - \vec{a} \right| = \frac{2}{5}|\vec{b} - \vec{a}| \\ |\overrightarrow{AE}| &= |\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}| = \left| \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a} \right| = \frac{2}{3}|\vec{a} - \vec{b}|\end{aligned}$$

となるため、

$$\frac{S}{T} = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AE}|} = \frac{\frac{2}{5}|\vec{b} - \vec{a}|}{\frac{2}{3}|\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{\frac{2}{5}|\vec{a} - \vec{b}|}{\frac{2}{3}|\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{3}{5}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{5}$$

2

[1]

行列 P の行列式は

$$\begin{aligned}\det(P) &= 1 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

となるため P の逆行列は,

$$P^{-1} = -6 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= P^{-1}X \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2t+1}{2} \\ \frac{3t+1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

[2]

$A^n X$ を計算すると,

$$\begin{aligned}A^n X &= A \cdot A \cdots A \cdot X \\ &= PP^{-1} \cdot A \cdot PP^{-1} \cdot A \cdots A \cdot PP^{-1} \cdot X \quad (\because PP^{-1} = E) \\ &= P(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP)P^{-1}X \\ &= PB^n C\end{aligned}$$

となる。(1)の答を用いてこの式を変形すると,

$$\begin{aligned}A^n X &= PB^n C \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} t + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \\ \frac{1}{2^n} t + \frac{1}{3^{n+1}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2^n} t + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \\ b_n &= \frac{1}{2^n} t + \frac{1}{3^{n+1}}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{2^n} t + \frac{1}{2 \cdot 3^n}, b_n = \frac{1}{2^n} t + \frac{1}{3^{n+1}}$$

[3]

$a_n b_n$ を計算すると,

$$\begin{aligned}a_n b_n &= \left(\frac{1}{2^n} t + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \right) \left(\frac{1}{2^n} t + \frac{1}{3^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{4^n} t^2 + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6^n} t + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9^n}\end{aligned}$$

となるため S_n を計算すると,

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n a_k b_k \\ &= t^2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} \right) + \frac{5}{6} t \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{6^k} \right) + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{9^k} \right) \\ &= t^2 \left\{ \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)}{1 - \frac{1}{4}} \right\} + \frac{5}{6} t \left\{ \frac{\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6^n} \right)}{1 - \frac{1}{6}} \right\} + \frac{1}{6} \left\{ \frac{\frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{9^n} \right)}{1 - \frac{1}{9}} \right\} \\ &= \frac{1}{3} t^2 \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) + \frac{1}{6} t \left(1 - \frac{1}{6^n} \right) + \frac{1}{48} \left(1 - \frac{1}{9^n} \right)\end{aligned}$$

となる。したがって S_n の極限を求めると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{6} t + \frac{1}{48}$$

となる。この値が 0 になる t を求めればよい。したがって,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{6} t + \frac{1}{48} &= 0 \\ \Leftrightarrow 16t^2 + 8t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (4t + 1)^2 &= 0 \\ \therefore t &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = -\frac{1}{4}$$

[1]

三角関数の積和の公式より、

$$\sin(x-t)\sin(2t-a) = \frac{1}{2}\{\cos(x-3t+a) - \cos(x+t-a)\}$$

となるから、与えられた式を変形すると、

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(x-t)\sin(2t-a)dt &= \int_0^\pi \frac{1}{2}\{\cos(x-3t+a) - \cos(x+t-a)\}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\sin(-3t+x+a) - \sin(t+x-a)\right]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{6}\{-2\sin(x+a)\} - \frac{1}{2}\{-2\sin(x-a)\} \\ &= \frac{1}{3}\sin(x+a) + \sin(x-a)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3}\sin(x+a) + \sin(x-a)$$

[2]

[1] の答および三角関数の加法定理より $f(x)$ の式を変形すると、

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{3}\sin(x+a) + \sin(x-a) \\ &= \frac{1}{3}(\sin x \cos a + \cos x \sin a) + \sin x \cos a - \cos x \sin a \\ &= \frac{4}{3}\sin x \cos a - \frac{2}{3}\sin a \cos x\end{aligned}$$

となる。 $A = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\cos a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\sin a\right)^2}$ とおくと、

$$\left(\frac{\frac{4}{3}\cos a}{A}\right)^2 + \left(\frac{\frac{2}{3}\sin a}{A}\right)^2 = 1$$

となるから、

$$\cos b = \frac{\frac{4}{3}\cos a}{A}, \quad \sin b = \frac{\frac{2}{3}\sin a}{A}$$

を満たす b が存在する。これを用いて $f(x)$ の式を変形すると、

$$\begin{aligned}f(x) &= A\left(\frac{\frac{4}{3}\cos a}{A}\sin x + \frac{\frac{2}{3}\sin a}{A}\cos x\right) \\ &= A\sin(x+b)\end{aligned}$$

となる。 $x+b = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ のとき $f(x)$ が最大値をとり、 $x+b = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ のとき $f(x)$ が最小値

をとる。以上より、

$$\begin{aligned}M(a) &= A \\ &= \sqrt{\left(\frac{4}{3}\cos a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\sin a\right)^2} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{4\cos^2 a + \sin^2 a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m(a) &= -A \\ &= -\sqrt{\left(\frac{4}{3}\cos a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\sin a\right)^2} \\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{4\cos^2 a + \sin^2 a}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad M(a) = \frac{2}{3}\sqrt{4\cos^2 a + \sin^2 a}, \quad m(a) = -\frac{2}{3}\sqrt{4\cos^2 a + \sin^2 a}$$

[3]

[2] で求めた $M(a)$ の式を変形すると、

$$\begin{aligned}M(a) &= \frac{2}{3}\sqrt{4\cos^2 a + \sin^2 a} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{4(\cos^2 a + \sin^2 a) + \sin^2 a - 4\sin^2 a} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{4 - 3\sin^2 a}\end{aligned}$$

となる。これを与えられた式に代入すると、

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(a)\sin(2a)da \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\sin(2a)\sqrt{4 - 3\sin^2 a}da\end{aligned}$$

となる。 $\sin^2 a = t$ とおくと、

$$\begin{aligned}dt &= 2\sin a \cos a da = \sin(2a) da \\ \Leftrightarrow da &= \frac{dt}{\sin(2a)}\end{aligned}$$

a	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \rightarrow 1$

であるから、

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\sin(2a)\sqrt{4 - 3\sin^2 a}da \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3}\sqrt{4 - 3t}dt \\ &= \frac{2}{3}\left[-\frac{2}{9}(4 - 3t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= -\frac{4}{27}(1 - 8) \\ &= \frac{28}{27}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{28}{27}$$

[1]

原点のまわりを 45° 回転させる一次変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

である。したがって点 Q の座標を計算すると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t \\ t - \log t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}(t - \log t) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}(t - \log t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\log t \\ \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}\log t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\log t, \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}\log t\right)$$

[2]

点 Q の x 座標が 0 になるときの t を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}\log t &= 0 \\ \Leftrightarrow \log t &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 1 \end{aligned}$$

となるから、点 R の y 座標は

$$\sqrt{2} \cdot 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = \sqrt{2}$$

となる。点 Q が描く曲線 C の傾きを計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2t}}{\frac{\sqrt{2}}{2t}} \\ &= 2t - 1 \end{aligned}$$

となる。したがって $t=1$ を代入して、接線 ℓ の傾きは

$$2 \cdot 1 - 1 = 1$$

となる。以上より、接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y - \sqrt{2} &= 1 \cdot (x - 0) \\ \Leftrightarrow y &= x + \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = x + \sqrt{2}$$

[3]

関数 $f(t) = y - (x + \sqrt{2})$ を定義し、この式に点 Q の座標を代入すると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}\log t - \frac{\sqrt{2}}{2}\log t - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}t - \sqrt{2}\log t - \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。 $f(t)$ を微分すると、

$$f'(t) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{t}\right) > 0 \quad (\because t > 1)$$

となる。また、 t が $t > 1$ の範囲から 1 に近づくときの $f(t)$ の極限は、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1+0} \sqrt{2}t - \sqrt{2}\log t - \sqrt{2} &= \sqrt{2} - 0 - \sqrt{2} \quad (\because \lim_{t \rightarrow 1+0} \log t = 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。以上より、 $t > 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &> 0 \\ \Leftrightarrow y &> x + \sqrt{2} \end{aligned}$$

を満たすから、点 Q は接線 ℓ より上側にあることが示された。

(証明終)

[4]

点 Q の x 座標と t の関係は

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\log t \quad \dots \textcircled{1}$$

である。したがって、 t が $t > 1$ の範囲にあるとき x は $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ にある。また、 $t=1$ のときは点 Q

は点 R を示すため点 Q が接線 ℓ 上にある。したがって、 $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき曲線 C は接線 ℓ と交わっている、あるいは接線 ℓ より上側にある。曲線 C の方程式を求めるために式①を変形すると、

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}\log t \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}x &= \log t \\ \Leftrightarrow t &= e^{\sqrt{2}x} \end{aligned}$$

となる。これを点 Q の y 座標と t の関係式に代入すると、

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}\log t \\ \Leftrightarrow y &= \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x} - x \end{aligned}$$

となり、曲線 C の方程式が求められた。以上より、面積 S を計算すると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{e}} \left\{ \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x} - x - (x + \sqrt{2}) \right\} dx \\ &= \left[e^{\sqrt{2}x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \sqrt{2}x \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{e}} \\ &= (e^2 - 2 - 2) - \left(e - \frac{1}{2} - 1 \right) \\ &= e^2 - e - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad e^2 - e - \frac{5}{2}$$