

平成19年度前期日程試験問題

数 学

I 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は **1** ～ **4** の4題です。全問に解答しなさい。
3. 試験開始後ただちに問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁がないことを確認し、ある場合には手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 問題冊子の針金綴じは、はずしてもよい。問題冊子の余白は計算用に使用してもよい。
5. 解答用紙(別紙)は4枚(Aい～Aに)です。
6. 各解答用紙の指定欄に受験番号を記入しなさい。
7. 試験終了後、解答用紙は回収します。問題冊子は持ち帰りなさい。

II 解答上の注意

1. 解答は、解答用紙の指定箇所に記入しなさい。
2. 解答用紙の「〔1〕 解」、「(2) 解」などで始まる空白部分に論証過程や途中計算を記述して解答しなさい。「答」欄には設問の答を再度記入しなさい。
3. 「〔3〕 証明」で始まる空白部分には証明を記述しなさい。

- 1 平面上に $|\overrightarrow{OA}| = 2$, $|\overrightarrow{OB}| = 3$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 5$ を満たす 3 点 O, A, B がある。直線 OA に関して点 B と対称な点を C, $\angle AOB$ の二等分線が線分 AB と交わる点を D, 直線 AB と直線 OC の交点を E とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき, 次の各問に答えよ。

[1] 次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{OC}$

(2) $\overrightarrow{OE}$

(3) $\overrightarrow{OD}$

[2] $\triangle OAD$ の面積を S , $\triangle OAE$ の面積を T とする。このとき, $\frac{S}{T}$ の値を求めよ。

2 t は実数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \frac{2t+1}{2} \\ \frac{3t+1}{3} \end{pmatrix}$$

について、次の各問に答えよ。

[1] $B = P^{-1}AP$ と $C = P^{-1}X$ を求めよ。

[2] $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n X$ によって a_n, b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を定める。このとき、 a_n, b_n を n と t を用いて表せ。

[3] $S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n$ とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ となるような t の値を求めよ。

3 a を実数として、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\pi} \sin(x-t) \sin(2t-a) dt$$

によって定める。このとき、次の各問に答えよ。

[1] 定積分 $\int_0^{\pi} \sin(x-t) \sin(2t-a) dt$ を求めよ。

[2] $f(x)$ の最大値を $M(a)$ 、最小値を $m(a)$ とする。 $M(a)$ 、 $m(a)$ を求めよ。

[3] 定積分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(a) \sin(2a) da$ を求めよ。

- 4 座標平面上の点 $P(t, t - \log t)$ ($t > 0$) をとる。P が原点のまわりに 45° だけ回転した点を $Q(x, y)$ とする。ただし、対数は自然対数とする。このとき、次の各問に答えよ。

〔1〕 Q の座標 x, y を t を用いて表せ。

〔2〕 t が $t > 0$ の範囲を動くとき Q が描く曲線を C とする。 C が y 軸と交わる点を R とおく。 R における C の接線を ℓ とする。 ℓ の方程式を求めよ。

〔3〕 t が $t > 1$ の範囲にあるとき、点 Q は接線 ℓ より上側にあることを示せ。

〔4〕 曲線 C 、接線 ℓ および 2 直線 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \sqrt{2}$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。