

1

[1]

与えられた式を変形すると,

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}} \cdot \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\sqrt{2k+1})^2 - (\sqrt{2k-1})^2} \cdot (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\
 &= \frac{1}{2} \{(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})\} \\
 &= \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1} - 1)
 \end{aligned}$$

となる。また $S=9$ となるのは,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1} - 1) &= 9 \\
 \Leftrightarrow \sqrt{2n+1} &= 19 \\
 \Leftrightarrow 2n+1 &= 361 \\
 \Leftrightarrow n &= 180
 \end{aligned}$$

のときである。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1} - 1), \quad n = 180$$

[2]

まず与えられた定積分の値を求めると,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^{\log 7} x e^x dx \\
 &= [x e^x]_1^{\log 7} - \int_1^{\log 7} e^x dx \\
 &= (7 \log 7 - e) - [e^x]_1^{\log 7} \\
 &= (7 \log 7 - e) - (7 - e) \\
 &= 7(\log 7 - 1)
 \end{aligned}$$

となる。ここで $1.94 < \log 7 < 1.95$ であるから,

$$\begin{aligned}
 0.94 &< \log 7 - 1 < 0.95 \\
 \therefore 7 \times 0.94 &= 6.58 < 7(\log 7 - 1) < 6.65 = 7 \times 0.95
 \end{aligned}$$

である。よって I を超えない最大の整数 m は,

$$m = 6$$

である。

$$(\text{答}) \quad m = 6$$

[3]

不定形を回避すべく変形していくと,

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\cos x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x (\cos x + 1)}{-\sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x (\cos x + 1)}{\sin x \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x} \right) \\
 &= -1 \cdot \frac{1+1}{1} \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

$$\text{と求まる。} \left(\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right)$$

$$(\text{答}) \quad -2$$

[1]

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} k & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{より, 行列の積 } AB \text{ を計算すると,}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2k+2+4 & 2-3+8 \\ k-2k+3 & -1+3k+6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2k+6 & 7 \\ -k+3 & 3k+5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AB = \begin{pmatrix} -2k+6 & 7 \\ -k+3 & 3k+5 \end{pmatrix}$$

[2]

$AB \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ について, AB が逆行列を持つとき, その逆行列を両辺の左からかけて

$x=y=0$ となってしまうので, $x=y=0$ 以外の解を持つとき AB は逆行列を持つてはいけ
ない。すなわち AB の行列式は 0 である。よって

$$\begin{aligned} (-2k+6)(3k+5) - 7(-k+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (-k+3)(6k+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{1}{2}, 3 \end{aligned}$$

である。よって k のうち整数となるものは $k=3$ である。

$$(\text{答}) \quad k=3$$

[3]

$k=3$ のとき,

$$\begin{aligned} C &= BA \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & -6 & 9 \\ 7 & 11 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad C = \begin{pmatrix} -7 & -6 & 9 \\ 7 & 11 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

[4]

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \text{であり, } \vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \text{ とおくと,}$$

$$\begin{cases} 9 = -7s - 6t \\ 1 = 7s + 11t \\ 10 = 5t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow s = -3, t = 2$$

と求まる。したがって $\vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$ と表せる。

$$(\text{答}) \quad \vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$$

[5]

ベクトル $\vec{d}$ は $\vec{a}, \vec{b}$ に垂直なので, それぞれ内積をとると $\vec{d} \cdot \vec{a} = 0, \vec{d} \cdot \vec{b} = 0$ である。よつ
て,

$$\begin{aligned} \vec{d} \cdot \vec{a} &= 0 & \dots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow -7u + 7v &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{d} \cdot \vec{b} &= 0 & \dots \textcircled{2} \\ \Leftrightarrow -6u + 11v + 5w &= 0 \end{aligned}$$

① り $v=u$ であるから, これを②に代入して整理すると, $w=-u$ となる。したがって

$$\vec{d} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表せる。また $\vec{d}$ は単位ベクトルなので,

$$\begin{aligned} |\vec{d}| &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}u &= 1 \\ \Leftrightarrow u &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

である。ここで $-u=w \geq 0$ より, $u = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。したがって,

$$\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \vec{d} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3

[1]

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta, \frac{dy}{d\theta} = 2 \cos 2\theta$$

であり, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲では $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{2 \cos 2\theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{4 \cos^2 \theta - 2}{\cos \theta} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4 \cos^2 \theta - 2}{\cos \theta}$$

[2]

$x = a = \sin \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) における C の接線は

$$\begin{aligned} y &= \frac{4 \cos^2 \alpha - 2}{\cos \alpha} (x - \sin \alpha) + \sin 2\alpha \\ &= \frac{4 \cos^2 \alpha - 2}{\cos \alpha} x - \frac{4 \cos^2 \alpha - 2}{\cos \alpha} \sin \alpha + \sin 2\alpha \end{aligned}$$

である。これが $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + b$ と一致するとき, 関係式

$$\begin{cases} \frac{4 \cos^2 \alpha - 2}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{4 \cos^2 \alpha - 2}{\cos \alpha} \sin \alpha + \sin 2\alpha = b \end{cases}$$

を満たす。第1式より

$$\begin{aligned} 4 \cos^2 \alpha - 2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \alpha \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cos^2 \alpha - \cos \alpha - \sqrt{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 \cos \alpha - \sqrt{3})(\sqrt{3} \cos \alpha + 1) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから, $0 < \cos \alpha < 1$ である。よって,

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。よって $\alpha = \frac{\pi}{6}$ である。したがって,

$$\begin{aligned} a &= \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。また, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ を第2式に代入することによって,

$$\begin{aligned} b &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

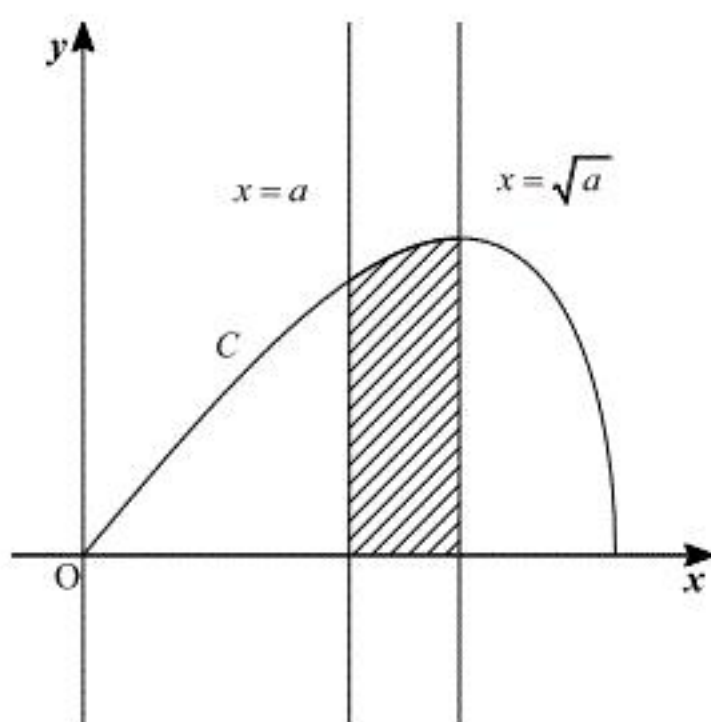
と求まる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

[3]

$x = \sin \theta$ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において単調増加であり, $y = \sin 2\theta$ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ において単調増加,

$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において単調減少であることに注意する。曲線 C の概形は下図のようになる。



ここで $x = \sin \theta$ であるから, $dx = \cos \theta d\theta$ であり,

x	$a = \frac{1}{2}$	$\dots$	$\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\dots$	$\frac{\pi}{4}$

となることに注意すれば, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta \cdot \cos \theta d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \left[-\frac{2}{3} \cos^3 \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{2}{3} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right\} \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{12}$$

[1]

$f(x) = (x^2 + 3x)e^{-\frac{x}{2}}$ であるから、これを微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+3)e^{-\frac{x}{2}} + (x^2+3x)\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3\right)e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

[2]

まず $f'(x)$ を符号変化のわかりやすい形に変形すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3\right)e^{-\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

となる。 $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ であることに注意すると、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	-2	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$18e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$

また、 $x > 0$ において $f(x) = x(x+3)e^{-\frac{x}{2}} > 0$ であるから、 $f(x)$ は $x = -2$ で最小値 $-2e$ をとる。

(答) $x = -2$ で最小値 $-2e$ をとる

[3]

方程式 $(x+3)e^{-\frac{x}{2}} = k$ の解の個数を調べるには、 xy 平面上で曲線 $y = (x+3)e^{-\frac{x}{2}}$ と直線 $y = k$ の共有点の個数を調べればよい。

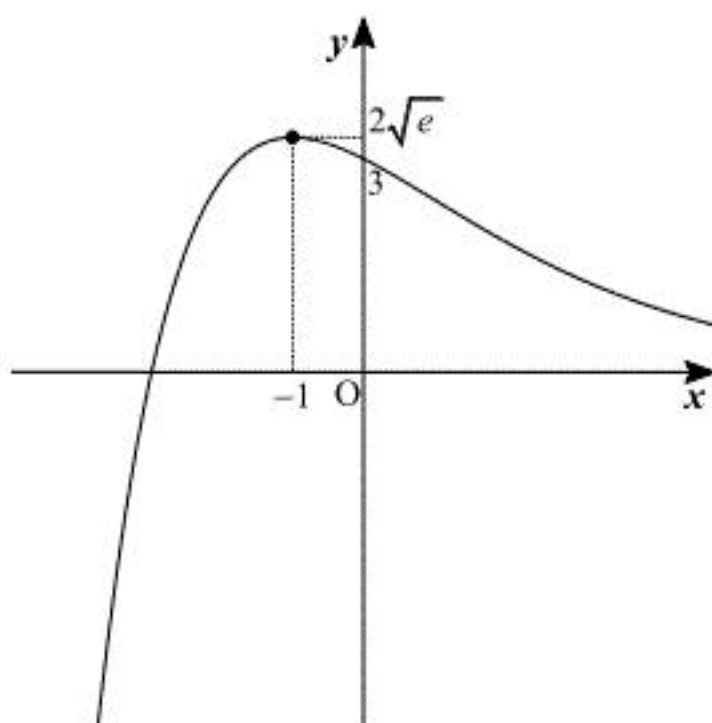
$g(x) = (x+3)e^{-\frac{x}{2}}$ とおく。これを微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-\frac{x}{2}} + (x+3)\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}(x+1)e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

となるから、 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	-1	...
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	$2\sqrt{e}$	$\searrow$

題意より $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ であり、また $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ であるから、 $y = g(x)$ のグラフは以下のようになる。



したがって、曲線 $y = (x+3)e^{-\frac{x}{2}}$ と直線 $y = k$ の共有点の個数は、

$$\begin{cases} 2\sqrt{e} < k \text{ のとき共有点は } 0 \text{ 個} \\ k \leq 0, \quad k = 2\sqrt{e} \text{ のとき共有点は } 1 \text{ 個} \\ 0 < k < 2\sqrt{e} \text{ のとき共有点は } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

である。よって、方程式 $(x+3)e^{-\frac{x}{2}} = k$ の解の個数も上のようになる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} 2\sqrt{e} < k \text{ のとき共有点は } 0 \text{ 個} \\ k \leq 0, \quad k = 2\sqrt{e} \text{ のとき共有点は } 1 \text{ 個} \\ 0 < k < 2\sqrt{e} \text{ のとき共有点は } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

[4]

曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = mx$ の共有点の個数を調べるには、方程式 $f(x) = mx$ の解の個数を調べればよい。方程式 $f(x) = mx$ は、

$$\begin{aligned} f(x) &= mx \\ \Leftrightarrow x(x+3)e^{-\frac{x}{2}} &= mx \\ \Leftrightarrow x \left\{ (x+3)e^{-\frac{x}{2}} - m \right\} &= 0 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、[3]より $(x+3)e^{-\frac{x}{2}} - m = 0$ は高々 2 個しか異なる解を持たないので、方

程式 $f(x) = mx$ が相異なる 3 個の実数解をもつためには、方程式 $(x+3)e^{-\frac{x}{2}} - m = 0$ が $x = 0$ 以

外で相異なる 2 個の実数解を持つことが必要十分である。 $(x+3)e^{-\frac{x}{2}} - m = 0$ が $x = 0$ で解を持つのは $m = 3$ の時ときであるので、求める範囲は

$$0 < m < 3, 3 < m < 2\sqrt{e}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 < m < 3, 3 < m < 2\sqrt{e}$$