

平成20年度前期日程試験問題

数 学

I 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は **1** ～ **4** の4題です。全問に解答しなさい。
3. 試験開始後ただちに問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁がないことを確認し、ある場合には手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 問題冊子の針金綴じは、はずしてもよい。問題冊子の余白は計算用に使用してもよい。
5. 解答用紙(別紙)は4枚(Aい～Aに)です。
6. 各解答用紙の指定欄に受験番号を記入しなさい。
7. 試験終了後、解答用紙は回収します。問題冊子は持ち帰りなさい。

II 解答上の注意

1. 解答は、解答用紙の指定箇所に記入しなさい。
2. 解答用紙の「〔1〕 解」, 「〔2〕 解」などで始まる空白部分に論証過程や途中計算を記述して解答しなさい。「答」欄には設問の答えを再度記入しなさい。小問に「答えのみでよい」という指示のある場合は、「答」欄に設問の答えのみを記入しなさい。

1

次の問いに答えよ。ただし e は自然対数の底で、 $\log$ は自然対数を表す。

〔1〕 数列の和 $S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}}$ を求めよ。さらに $S = 9$ となるような n の値を求めよ。

〔2〕 定積分 $\int_1^{\log 7} x e^x dx$ の値を I とする。 I を超えない最大の整数 m を求めよ。ただし $1.94 < \log 7 < 1.95$ を使ってもよい。

〔3〕 極限值 $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\cos x - 1}$ を求めよ。

2 k を実数とするととき、行列

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ。

[1] 行列の積 AB を求めよ。ただし答えのみでよい。

[2] 連立1次方程式 $AB \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が、 $x = y = 0$ 以外の解をもつような k のうちで、整数であるものを求めよ。

[3] k を [2] で求めた値とする。このときの積 $C = BA$ を求めよ。ただし答えのみでよい。

[4] [3] で求めた C を

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、ベクトル $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ をベクトル

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

を用いて表せ。

[5] ベクトル $\vec{d} = (u, v, w)$ は $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に垂直であるとする。さらに $\vec{d}$ は単位ベクトルで $w \geq 0$ であるとする。このとき $\vec{d}$ を求めよ。

3 $x = \sin \theta, y = \sin 2\theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) が表す曲線を C とする。このとき次の問いに答えよ。

[1] $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $\frac{dy}{dx}$ を $\cos \theta$ の式で表せ。ただし答えのみでよい。

[2] $x = a$ ($0 < a < 1$) における C の接線の方程式が $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + b$ であるとき、 a, b を求めよ。

[3] a を [2] で求めた値とする。このとき曲線 C と x 軸、2 直線 $x = a, x = \sqrt{a}$ のすべてで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

4 関数 $f(x) = (x^2 + 3x)e^{-\frac{x}{2}}$ について次の問いに答えよ。ただし e は自然対数の底とする。また $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 3)e^{-\frac{x}{2}} = 0$ を使ってもよい。

〔1〕 $f'(x)$ を求めよ。ただし答えのみでよい。

〔2〕 $y = f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

〔3〕 k を定数とすると、方程式 $(x + 3)e^{-\frac{x}{2}} = k$ の異なる解の個数を、 k の値で場合分けして求めよ。

〔4〕 m を定数とすると、 $y = f(x)$ の表す曲線と直線 $y = mx$ が異なる 3 個の共有点をもつような m の範囲を求めよ。