

1

[1]

$$\begin{pmatrix} p & q \\ -q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -q \\ q & r \end{pmatrix} = 5E \quad \text{より,}$$

$$\begin{pmatrix} p^2 + q^2 & q(r-p) \\ q(r-p) & q^2 + r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

各成分を比較して,

$$p^2 + q^2 = 5 \quad \cdots(\text{イ})$$

$$q(r-p) = 0 \quad \cdots(\text{ロ})$$

$$q^2 + r^2 = 5 \quad \cdots(\text{ハ})$$

q は自然数だから, (ロ) より

$$r-p=0$$

$$\therefore r=p$$

であり, この下で (イ), (ハ) は

$$p^2 + q^2 = 5$$

これを満たす自然数 p, q ($p > q$) の組み合わせは

$$p=2, q=1$$

のみである。よって

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

[2]

[1] と同様にして,

$$r=p$$

$$p^2 + q^2 = 10$$

これを満たす自然数 p, q ($p > q$) の組み合わせは

$$p=3, q=1$$

のみである。よって

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

[3]

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

だから,

$$\begin{aligned} C &= (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[4]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} a_n - b_n \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2} &= \sqrt{\left\{ \frac{1}{10}(a_n - b_n) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{10}(a_n + b_n) \right\}^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{10} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \end{aligned}$$

ここで $OP_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ と表されるので,

$$OP_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{10} OP_n$$

また,

$$OP_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{5}$$

より

$$OP_n = OP_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{10} \right)^{n-1} = \sqrt{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{10} \right)^{n-1}$$

と表される。したがって,

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=1}^n \sqrt{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{10} \right)^{k-1} \\ &= \sqrt{5} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10} \right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{10}} \\ &= \frac{10\sqrt{5}}{10 - \sqrt{2}} \left\{ 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} d &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \\ &= \frac{10\sqrt{5}}{10 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{50\sqrt{5} + 5\sqrt{10}}{49} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{50\sqrt{5} + 5\sqrt{10}}{49}$$

2

[1]

$\overline{OP} = \vec{0}$ となるのは $(m, n) = (0, 0)$ となる場合で、その確率は

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

よって、 $\overline{OP} \neq \vec{0}$ となる確率は

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

(答) $\frac{15}{16}$

[2]

一回目に表が m 枚、二回目に表が n 枚出る確率を $P(m, n)$ とする。

$|\overline{OP}| = 0$ となる場合、その確率は

$$P(0, 0) = \frac{1}{16}$$

$|\overline{OP}| = 1$ となる場合、その確率は

$$P(1, 0) + P(0, 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$|\overline{OP}| = \sqrt{2}$ となる場合、その確率は

$$P(1, 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$|\overline{OP}| = 2$ となる場合、その確率は

$$P(0, 2) + P(2, 0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$|\overline{OP}| = \sqrt{5}$ となる場合、その確率は

$$P(1, 2) + P(2, 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$|\overline{OP}| = 2\sqrt{2}$ となる場合、その確率は

$$P(2, 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

以上より $|\overline{OP}|$ の期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{4} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + \sqrt{5} \cdot \frac{1}{4} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{16} \\ &= \frac{4 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$

(答) $\frac{4 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{8}$

[3]

$$x^2 + \frac{9}{4}y^2 - \frac{27}{4}y + \frac{45}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{4}\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

これと比較して、

$$a = \frac{3}{2}, b = 1, p = 0, q = \frac{3}{2}$$

(答) $a = \frac{3}{2}, b = 1, p = 0, q = \frac{3}{2}$

[4]

$$f(m, n) = \frac{m^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \left(n - \frac{3}{2}\right)^2$$

とおく。 $f(m, n) \leq 1$ のとき、点 P は楕円 C の内部にある。

ここで、明らかに $f(m, n)$ は $m = 2$ または $n = 0$ のときに $f(m, n) > 1$ となるので、 $m = 0, 1, n = 1, 2$ のときを考える。

$$f(0, 1) = \frac{1}{4}, P(0, 1) = \frac{1}{8}$$

$$f(0, 2) = \frac{1}{4}, P(0, 2) = \frac{1}{16}$$

$$f(1, 1) = \frac{25}{36}, P(1, 1) = \frac{1}{4}$$

$$f(1, 2) = \frac{25}{36}, P(1, 2) = \frac{1}{8}$$

よって点 P が楕円 C の内部にある確率は

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{9}{16}$$

(答) $\frac{9}{16}$

3

[1]

$$f(x) = \frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2+1}} \quad \text{のとき,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2 \cdot \sqrt{4x^2+1} - (-2x+1) \cdot \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}{4x^2+1} \\ &= \frac{-2(2x+1)}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

したがって増減表は次のようになる

x	...	$-\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗		↘

これより、 $f(x)$ の最大値は

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$$

(答) $x = -\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$

[2]

$$f'(0) = -2 \quad \text{ゆえ, } g(x) = -2x+1 \quad \text{となる。}$$

(答) $g(x) = -2x+1$

[3]

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= -2x+1 - \frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2+1}} \\ &= (-2x+1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} \right) \\ &= (-2x+1) \cdot \frac{\sqrt{4x^2+1} - 1}{\sqrt{4x^2+1}} \\ &= (-2x+1) \cdot \frac{4x^2}{\sqrt{4x^2+1}(\sqrt{4x^2+1}+1)} \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{1}{2}$ では $-2x+1 > 0$ なので,

$$(-2x+1) \cdot \frac{4x^2}{\sqrt{4x^2+1}(\sqrt{4x^2+1}+1)} > 0$$

よって $g(x) - f(x) > 0$, すなわち $g(x) > f(x)$ である。

(証明終)

[4]

$x=0, \frac{1}{2}$ で $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は交わるので,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \{g(x)\}^2 dx - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x+1)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2+1}} \right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (4x^2 - 4x + 1) dx - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} dx \\ &= \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x \right]_0^{\frac{1}{2}} - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{4x}{4x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{6}\pi - \pi \left[x \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(4x^2+1)'}{4x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi + \frac{\pi}{2} \left[\log(4x^2+1) \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log 2 \right) \pi \end{aligned}$$

(答) $\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log 2 \right) \pi$

4

[1]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

であるから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})}$$

[2]

$$\frac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})} = \frac{1}{2} \quad \text{より,}$$

$$2(e^t - e^{-t}) = \sqrt{2}(e^t + e^{-t})$$

$$(2 - \sqrt{2})e^t = (2 + \sqrt{2})e^{-t}$$

$$\therefore e^{2t} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

よって

$$t = \log(\sqrt{2} + 1)$$

$$(\text{答}) \quad t = \log(\sqrt{2} + 1)$$

[3]

$t = \log(\sqrt{2} + 1)$ のとき,

$$x = \frac{(\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$y = \frac{(\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1)}{2} = \sqrt{2}$$

であり, [2] より $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ なので, $y = \frac{1}{2}x + k$ と C は $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で接する。

よってこの接線の方程式は

$$y = \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}) + \sqrt{2} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

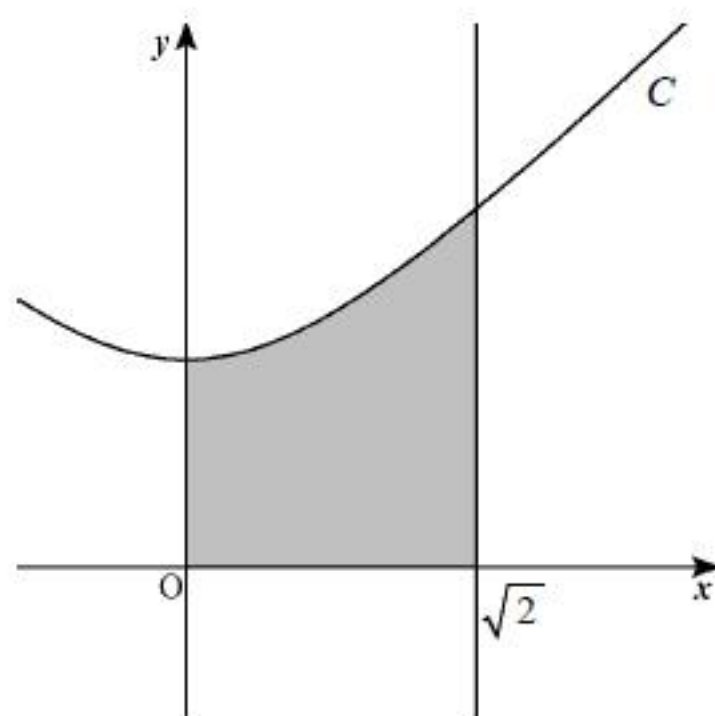
ゆえに

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\text{答}) \quad k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

[4]

グラフは次のようになる。



よって求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{2}} y \, dx \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2}} \, dt \quad (\text{ただし } \alpha = \log(\sqrt{2} + 1) \text{ である}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\alpha} (e^{2t} + 2 + e^{-2t}) \, dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}e^{2t} + 2t - \frac{1}{2}e^{-2t} \right]_0^{\alpha} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)^2 + 2\log(\sqrt{2} + 1) - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 \right\} \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{2} + 1)$$