平成21年度前期日程試験問題

数　　学

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は，４ページあります。
3. 問題は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ の４題です。全問解答しなさい。
4. 試験開始後に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁がないことを確認し，ある場合には手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の針金綴(と)じは，はずしてもかまいません。(問題冊子の余白は下書き，計算用に使用してもかまいません。)
6. 解答用紙(別紙)は４枚(Ａい～Ａに)です。
7. 各解答用紙の指定欄に，受験番号を記入しなさい。
8. 解答は，必ず解答用紙の指定箇所に記入しなさい。
9. 解答用紙は，持ち帰ってはいけません。
10. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

11. 解答用紙の「〔１〕　**解**」，「〔２〕　**解**」などで始まる空白部分に論証過程や途中計算を記述して解答しなさい。「**答**」欄には設問の答えを再度記入しなさい。
12. 小問に「答えのみでよい」という指示のある場合には，「**答**」欄に設問の答えのみを記入しなさい。
13. 解答用紙の「〔３〕　**証明**」で始まる空白部分には対応する小問の証明を記述しなさい。

1 $X = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & r \end{pmatrix}$ は次の2つの条件(a), (b)を満たす行列とする。

(a) $\begin{pmatrix} p & q \\ -q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -q \\ q & r \end{pmatrix} = sE$ が成り立つ。ただし，E は2次の単位行列である。

(b) p，q，r，s は自然数で，さらに $p > q$ が成り立つ。

次の問いに答えよ。

〔1〕 $s = 5$ のときの行列 X を A とする。A を求めよ。

〔2〕 $s = 10$ のときの行列 X を B とする。B を求めよ。ただし答えのみでよい。

〔3〕 〔1〕,〔2〕で求めた行列 A，B に対して，$C = (AB)^{-1}$ とおく。C を求めよ。

〔4〕 $a_1 = 1$，$b_1 = 2$ として，2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。ただし，C は〔3〕で求めた行列である。これらの数列から，O を原点とする xy 平面上に点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ をとり，

$$d_n = \mathrm{OP}_1 + \mathrm{OP}_2 + \cdots\cdots + \mathrm{OP}_n$$

とおく。このとき，$d = \lim_{n \to \infty} d_n$ を求めよ。

2 2枚の硬貨を同時に投げる試行を2回続ける。1回目に表が出る硬貨の枚数を m とし，2回目に表が出る硬貨の枚数を n とする。このとき，O を原点とする xy 平面上に点 $\mathrm{P}(m,\ n)$ をとる。次の問いに答えよ。

〔1〕 ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \neq \vec{0}$ となる確率を求めよ。

〔2〕 ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の期待値 E を求めよ。

〔3〕 $x^2 + \dfrac{9}{4}y^2 - \dfrac{27}{4}y + \dfrac{45}{16} = 0$ で表される楕円を C とする。この楕円の方程式を $\dfrac{(x-p)^2}{a^2} + \dfrac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ の形に表すとき，実数 a，b，p，q を求めよ。ただし，a，b は正とする。

〔4〕 点 P が楕円 C によって囲まれた部分にある確率を求めよ。

3 関数$f(x)=\dfrac{-2x+1}{\sqrt{4x^2+1}}$について次の問いに答えよ。

〔1〕 $f(x)$の最大値と，そのときのxの値を求めよ。

〔2〕 $y=f(x)$で表される曲線上の点$(0,\ 1)$における接線$y=g(x)$を求めよ。ただし答えのみでよい。

〔3〕 $0<x<\dfrac{1}{2}$のとき，$f(x)<g(x)$が成り立つことを示せ。

〔4〕 曲線$y=f(x)$と接線$y=g(x)$で囲まれた部分を，x軸のまわりに1回転してできる回転体の体積Vを求めよ。

$\boxed{4}$ 媒介変数 t を用いて

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

で表される曲線を C とする。

〔1〕 $\dfrac{dy}{dx}$ を t の式で表せ。ただし答えのみでよい。

〔2〕 〔1〕で求めた t の式を用いて，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}$ となる t の値を求めよ。

〔3〕 直線 $y = \dfrac{1}{2}x + k$ が C と接するとき，実数 k の値を求めよ。

〔4〕 曲線 C，直線 $x = \sqrt{2}$，x 軸，y 軸のすべてで囲まれた部分の面積 S を求めよ。