1

〔1〕 点 $\mathrm{P}(5,0,0)$，点 $\mathrm{Q}(0,5,0)$　　〔2〕 $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)$　　〔3〕 $V=\frac{125\sqrt{10}}{12}$

〔4〕

4 点 O, P, Q, R を通る球面の中心を点 $\mathrm{D}(a,b,c)$ とすると，

$$\mathrm{DO}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow \mathrm{DO}^2=a^2+b^2+c^2\cdots②$$

$$\mathrm{DP}=\sqrt{(a-5)^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow \mathrm{DP}^2=(a-5)^2+b^2+c^2\cdots③$$

$$\mathrm{DQ}=\sqrt{a^2+(b-5)^2+c^2}\Leftrightarrow \mathrm{DQ}^2=a^2+(b-5)^2+c^2\cdots④$$

$$\mathrm{DR}=\sqrt{\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\left(b-\frac{5}{2}\right)^2+\left(c-\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{DR}^2=\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\left(b-\frac{5}{2}\right)^2+\left(c-\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)^2\cdots⑤$$

であり，$\mathrm{DO}=\mathrm{DP}=\mathrm{DQ}=\mathrm{DR}\Leftrightarrow \mathrm{DO}^2=\mathrm{DP}^2=\mathrm{DQ}^2=\mathrm{DR}^2\cdots⑥$を満たす。

②，③，⑥より，

$$a^2=(a-5)^2$$
$$a=\frac{5}{2}$$

②，④，⑥より，

$$b^2=(b-5)^2$$
$$b=\frac{5}{2}$$

②，⑤，⑥より，

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+c^2=0+0+\left(c-\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)^2$$
$$\frac{25}{2}+c^2=c^2-5\sqrt{10}c+\frac{125}{2}$$
$$c=\sqrt{10}$$

と求めることができる。よって，点 D の座標は $\mathrm{D}\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\sqrt{10}\right)$ である。よって半径 r_1 は

$$r_1=\mathrm{DR}=\frac{5\sqrt{10}}{2}-\sqrt{10}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

となる。

(答) $r_1=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

〔5〕

四面体 OPQR に内接する球面の中心を E とし，四面体 OPQE, OPRE, OQRE, PQRE の体積をそれぞれ V_1，V_2，V_3，V_4 とすれば，これらの和は V に等しい。すなわち，

$$V=V_1+V_2+V_3+V_4$$

四面体 OPQR に内接する球面の中心と四面体 OPQR の各面との距離は r_2 に等しいので，V_1，V_2，V_3，V_4 を r_2 を用いて表すと，それぞれ

$$V_1=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OPQ}\cdot r_2$$

$$V_2=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OPR}\cdot r_2$$

$$V_3=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OQR}\cdot r_2$$

$$V_4=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{PQR}\cdot r_2$$

となる。ここで $\triangle\mathrm{OPQ}$，$\triangle\mathrm{OPR}$，$\triangle\mathrm{OQR}$，$\triangle\mathrm{PQR}$ をそれぞれ求めると，

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot5=\frac{25}{2}$$

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot5\sqrt{2}\cdot\frac{5\sqrt{10}}{2}=\frac{25\sqrt{5}}{2}$$

$\triangle\mathrm{OPR}$ の, OP を底辺とした時の高さは，三平方の定理より，

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{11}}{2}$$

となるので，

$$\triangle\mathrm{OPR}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{5\sqrt{11}}{2}=\frac{25\sqrt{11}}{4}$$

また，対称性より，

$$\triangle\mathrm{OQR}=\triangle\mathrm{OPR}=\frac{25\sqrt{11}}{4}$$

である。よって，V_1，V_2，V_3，V_4 の和は

$$\begin{aligned}V_1+V_2+V_3+V_4&=\frac{1}{3}(\triangle\mathrm{OPQ}+\triangle\mathrm{OPR}+\triangle\mathrm{OQR}+\triangle\mathrm{PQR})\cdot r_2\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{25}{2}+\frac{25\sqrt{11}}{4}+\frac{25\sqrt{11}}{4}+\frac{25\sqrt{5}}{2}\right)\cdot r_2\\&=\frac{25}{6}\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{11}\right)\cdot r_2\end{aligned}$$

であり，これが〔3〕の結果と一致することから r_2 を求めると

$$V=\frac{125\sqrt{10}}{12}=\frac{25}{6}\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{11}\right)\cdot r_2$$
$$r_2=\frac{5\sqrt{10}}{2\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{11}\right)}$$

となる。よって，

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\frac{3\sqrt{10}}{2}}{\frac{5\sqrt{10}}{2\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{11}\right)}}=\frac{3\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{11}\right)}{5}$$

である。

(答) $\frac{r_1}{r_2}=\frac{3\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{11}\right)}{5}$

〔解説〕

〔1〕

中心が点 $\mathrm{C}\left(1,1,\sqrt{10}\right)$，半径が $3\sqrt{3}$ の球面の方程式は

$$(x-1)^2+(y-1)^2+\left(z-\sqrt{10}\right)^2=27\cdots①$$

である。点 P は球面 S と x 軸の交点なので，①に $y=z=0$ を代入して，

$$x=5,-3$$

となる。ここで，点 P は x 軸の正の部分に存在するので，

$$x=5$$

であり，点 P の座標は $\mathrm{P}(5,0,0)$ である。

同様にして，点 Q は球面 S と y 軸の交点なので，①に $x=z=0$ を代入して，

$$y=5,-3$$

となる。ここで，点 Q は y 軸の正の部分に存在するので，

$$y=5$$

であり，点 Q の座標は $\mathrm{Q}(0,5,0)$ である。

〔2〕

点 R は直線 OC 上の点なので，実数 k を用いて，

$$\overline{\mathrm{CR}}=k\overline{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix}k\\k\\\sqrt{10}k\end{pmatrix}$$

とおける。他方，点 R は S 上にあるので，

$$\left|\overline{\mathrm{CR}}\right|=3\sqrt{3}$$

である。よって，

$$\left|\overline{\mathrm{CR}}\right|=\sqrt{k^2+k^2+\left(\sqrt{10}k\right)^2}=3\sqrt{3}$$
$$12k^2=27$$
$$k=\pm\frac{3}{2}$$

である。

$k=\frac{3}{2}$ のとき，点 R の座標は $\mathrm{R}\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)$ となり，適する。

$k=-\frac{3}{2}$ のとき，点 R の座標は $\mathrm{R}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ となり，z 座標が正という条件に反する。

よって，点 R の座標は $\mathrm{R}\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)$ である。

〔3〕

四面体 OPQR の頂点のうち, O, P, Q は平面 $z=0$ 上にあるので,底面を $\triangle\mathrm{OPQ}$ と見たとき，高さは点 R の z 座標に等しく

$$\frac{5\sqrt{10}}{2}$$

である。また，$\triangle\mathrm{OPQ}$ は $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ の直角三角形であるので $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot5\cdot5=\frac{25}{2}$$

である。したがって，四面体 OPQR の体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot\frac{25}{2}\cdot\frac{5\sqrt{10}}{2}\\&=\frac{125\sqrt{10}}{12}\end{aligned}$$

となる。

2

〔1〕 $a=2$，$b=1$

〔2〕

B は対角化されているので累乗の計算が容易である。$|P|=-1+2=1\neq 0$ より P^{-1} が存在するので，〔1〕で与えられた等式の両辺に左から P^{-1} をかけて，

$$P^{-1}AP=B$$

を得る。この両辺を n 乗すると，

$$P^{-1}A^nP=B^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-2)^n\end{pmatrix}$$

となる。両辺に左から P，右から P^{-1} をかけると，

$$\begin{aligned}A^n&=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-2)^n\end{pmatrix}P^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-1 & -(-2)^n\\ 2 & (-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-1-(-2)^{n+1} & -1+(-2)^n\\ 2+(-2)^{n+1} & 2-(-2)^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

（答） $A^n=\begin{pmatrix}-1-(-2)^{n+1} & -1+(-2)^n\\ 2+(-2)^{n+1} & 2-(-2)^n\end{pmatrix}$

〔3〕

（答） $a_n=\begin{cases}2+2^{n+1} & (n\text{ が奇数のとき})\\ -1+2^{n+1} & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$

〔4〕

〔3〕より，$a_{2k-1}=2+4^k$，$a_{2k}=-1-(-2)^{2k+1}$ なので S_n は，

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{2k-1}+2a_{2k}\right)r^k\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left[2+4^k+2\left\{-1-(-2)^{2k+1}\right\}\right]r^k\\ &=\sum_{k=1}^{n}5(4r)^k\end{aligned}$$

となり，S_n は公比が $4r$ の等比数列の和である。

したがって S_n が収束する条件は

$$-1<4r<1$$

$$-\frac{1}{4}<r<\frac{1}{4}$$

であり，このとき S_n は

$$S_n=5\cdot\frac{4r\left\{1-(4r)^n\right\}}{1-4r}$$

であり，極限値 S は

$$S=\frac{20r}{1-4r}$$

である。

（答） $-\frac{1}{4}<r<\frac{1}{4}$，$S=\frac{20r}{1-4r}$

〔解説〕

〔1〕

与えられた等式の両辺をそれぞれ，計算すると，

$$\begin{aligned}AP&=\begin{pmatrix}-5 & -3\\ 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ a & b\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}5-3a & 5-3b\\ -6+4a & -6+4b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}PB&=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ a & -2b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。これらの各成分が等しいので，

$$5-3a=-1,\ 5-3b=2$$

より，

$$a=2,\ b=1$$

これは，

$$-6+4a=a,\ -6+4b=-2b$$

を満たす。よって，$a=2,\ b=1$。

〔3〕

［ｉ］n が奇数のとき

$$(-2)^{n+1}>-(-2)^n>0$$

より，

$$2+(-2)^{n+1}>2-(-2)^n>0>-1+(-2)^n>-1-(-2)^{n+1}$$

なので

$$a_n=2+(-2)^{n+1}=2+2^{n+1}$$

である。

［ⅱ］n が偶数のとき

$$(-2)^{n+1}<-(-2)^n<0$$

より

$$2+(-2)^{n+1}<2-(-2)^n<0<-1+(-2)^n<-1-(-2)^{n+1}$$

なので

$$a_n=-1-(-2)^{n+1}=-1+2^{n+1}$$

である。

（答） $a_n=\begin{cases}2+2^{n+1} & (n\text{ が奇数のとき})\\ -1+2^{n+1} & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$

3

〔1〕 $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\sin t\\ \sqrt{3}\cos t\end{pmatrix}$，$|\vec{v}|=\sqrt{3+\sin^2 t}$

〔2〕

〔1〕で得た結果を利用して，

$$|\vec{v}|^2=3+\sin^2 t$$

$$\frac{d}{dt}|\vec{v}|^2=2\sin t\cdot\cos t$$

を得る。よって $f(t)$ は

$f(t)=-2\cos t+2\sin t\cdot\cos t$

となる。両辺を t で微分すると，

$$\begin{aligned}f'(t)&=2\sin t+2\cos^2 t-2\sin^2 t\\&=-4\sin^2 t+2\sin t+2\\&=-2\left(2\sin^2 t-\sin t-1\right)\\&=-2(2\sin t+1)(\sin t-1)\end{aligned}$$

となる。$f'(t)=0$ となるのは

$$\sin t=-\frac{1}{2},1$$

のときであり，$0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲では，

$$t=\frac{\pi}{2},\frac{7}{6}\pi,\frac{11}{6}\pi$$

のときである。よって $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲における $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(t)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	-2	↗	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	-2

よって，$f(t)$ は $t=\frac{7}{6}\pi$ のとき，最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ を，$t=\frac{11}{6}\pi$ のとき，最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

(答) $t=\frac{7}{6}\pi$ のとき，最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$t=\frac{11}{6}\pi$ のとき，最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

〔3〕

〔1〕，〔2〕より，

$$\frac{f(t)}{|\vec{v}|^2}=\frac{-2\cos t+2\sin t\cdot\cos t}{3+\sin^2 t}$$

となる。よって，定積分 I の値は

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(t)}{|\vec{v}|^2}dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-2\cos t+2\sin t\cdot\cos t}{3+\sin^2 t}\right)dt\\&=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{3+\sin^2 t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin t\cdot\cos t}{3+\sin^2 t}dt\\&=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{3+\sin^2 t}dt+\left[\log\left(3+\sin^2 t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{3+\sin^2 t}dt+\log\frac{4}{3}\end{aligned}$$

となる。ここで $\sin t=\sqrt{3}\tan\theta$ とすると，t が $0\to\frac{\pi}{2}$ で θ は $0\to\frac{\pi}{6}$ であり，

$\cos t\,dt=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$ となる。よって

$$\begin{aligned}I&=-2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{3\left(1+\tan^2\theta\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta+\log\frac{4}{3}\\&=-2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{3}}d\theta+\log\frac{4}{3}\\&=-2\left[\frac{\theta}{\sqrt{3}}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\log\frac{4}{3}\\&=-\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+\log\frac{4}{3}\end{aligned}$$

(答) $I=-\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+\log\frac{4}{3}$

〔解説〕

〔1〕

定義にしたがって計算すれば，

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sin t\\ \sqrt{3}\cos t\end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{4\sin^2 t+3\cos^2 t}=\sqrt{3+\sin^2 t}$$

となる。

4

$e^x = X$ とおくと，与式は

$$|yX^2-6X-8| = -(X-2)(X-4) \cdots ①$$

と書き換えることができる。

左辺が 0 以上より，右辺も 0 以上である必要があり，

$$-(X-2)(X-4) \geqq 0$$

$$2 \leqq X \leqq 4 \Leftrightarrow \log 2 \leqq x \leqq 2\log 2 \cdots ②$$

である必要がある。ここで yX^2-6X-8 の符号によって場合分けをする。

[1] $yX^2-6X-8 \geqq 0$ のとき，①式を整理すると

$$yX^2-6X-8 = -X^2+6X-8$$

$$y = \frac{-X^2+12X}{X^2} = -1+\frac{12}{X} = -1+12e^{-x}$$

となる。

[2] $yX^2-6X-8<0$ のとき，①式を整理すると

$$-yX^2+6X+8 = -X^2+6X-8$$

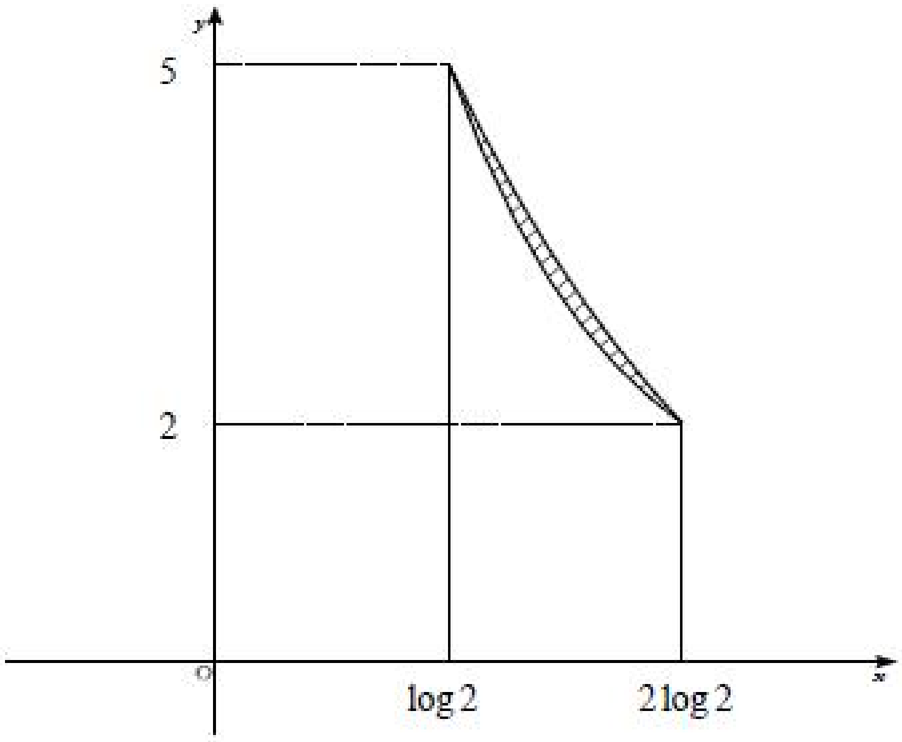
$$y = \frac{X^2+16}{X^2} = 1+\frac{16}{X^2} = 1+16e^{-2x}$$

以上[1], [2]より，$f(x) = -1+12e^{-x}$，$g(x) = 1+16e^{-2x}$ とおくと，

$$f(x)-g(x) = -16e^{-2x}+12e^{-x}-2 = -16\left(e^{-x}-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{4}$$

であり，②の範囲において $f(x)-g(x) \geqq 0$ である。

よって問の等式で定まる曲線で囲まれる図形は次の斜線部のようになる。



よって求める面積 K は

$$K = \int_{\log 2}^{2\log 2}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$= \int_{\log 2}^{2\log 2}(-16e^{-2x}+12e^{-x}-2)dx$$

$$= \left[8e^{-2x}-12e^{-x}-2x\right]_{\log 2}^{2\log 2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}-3-4\log 2\right)-(2-6-2\log 2)$$

$$= \frac{3}{2}-2\log 2$$

となる。

(答) $K = \dfrac{3}{2}-2\log 2$