平成22年度前期日程試験問題

数　　学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は，４ページあります。
3. 問題は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ の４題です。全問解答しなさい。
4. 試験開始後に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁がないことを確認し，ある場合には手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の針金綴(と)じは，はずしてもかまいません。問題冊子の余白は下書き，計算用に使用してもかまいません。
6. 解答用紙(別紙)は４枚(Aい～Aに)です。
7. 各解答用紙の指定欄に，受験番号を記入しなさい。
8. 解答は，必ず解答用紙の指定箇所に記入しなさい。
9. 解答用紙は，持ち帰ってはいけません。
10. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

11. 解答用紙の「〔１〕　**解**」，「〔２〕　**解**」などで始まる空白部分に論証過程や途中計算を記述して解答しなさい。「**答**」欄には設問の答えを再度記入しなさい。
12. 小問に「答えのみでよい」という指示のある場合には，「**答**」欄に設問の答えのみを記入しなさい。

1　Oを原点とする座標空間にある，中心C$(1,\ 1,\ \sqrt{10})$，半径$3\sqrt{3}$の球面をSとする。次の問いに答えよ。

〔1〕　Sとx軸の正の部分との交点をPとし，Sとy軸の正の部分との交点をQとする。P，Qの座標を求めよ。ただし答えのみでよい。

〔2〕　2点O，Cを通る直線とSとの交点のうち，z座標が正であるものをRとする。Rの座標を求めよ。ただし答えのみでよい。

〔3〕　四面体OPQRの体積Vを求めよ。ただし答えのみでよい。

〔4〕　4点O，P，Q，Rを通る球面の半径r_1を求めよ。

〔5〕　四面体OPQRに内接する球面の半径をr_2とする。このとき，$\dfrac{r_1}{r_2}$の値を求めよ。

2 a, b を実数とする。行列

$$A=\begin{pmatrix}-5 & -3\\ 6 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ a & b\end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ。

〔1〕 $AP=PB$ を満たすように実数 a, b を定めよ。ただし答えのみでよい。

〔2〕 正の整数 n について A^n を求めよ。

〔3〕 A^n の成分のうち最大のものを a_n とする。a_n を求めよ。ただし答えのみでよい。

〔4〕 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+2a_{2k})r^k$ とおく。数列 $\{S_n\}$ が収束するような実数 r の範囲を求め，そのときの極限値 $S=\lim_{n\to\infty}S_n$ を r の式で表せ。

3 座標平面上を運動する点Pの時刻tにおける座標(x, y)が

$$x = 2\cos t,\ y = \sqrt{3}\sin t$$

で与えられているとする。このとき，次の問いに答えよ。

〔1〕 時刻tにおける点Pの速度$\vec{v}$と速さ$|\vec{v}|$を求めよ。ただし答えのみでよい。

〔2〕 $f(t) = -2\cos t + \dfrac{d}{dt}|\vec{v}|^2$とおく。$0 \leqq t \leqq 2\pi$における$f(t)$の最大値，最小値を求め，そのときの$t$の値を求めよ。

〔3〕 〔2〕の関数$f(t)$について定積分$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{|\vec{v}|^2}\,dt$を求めよ。

4 xy 平面上に

$$|ye^{2x} - 6e^x - 8| = -(e^x - 2)(e^x - 4)$$

で定まる曲線がある。この曲線によって囲まれる図形の面積 K を求めよ。ただし，e は自然対数の底である。