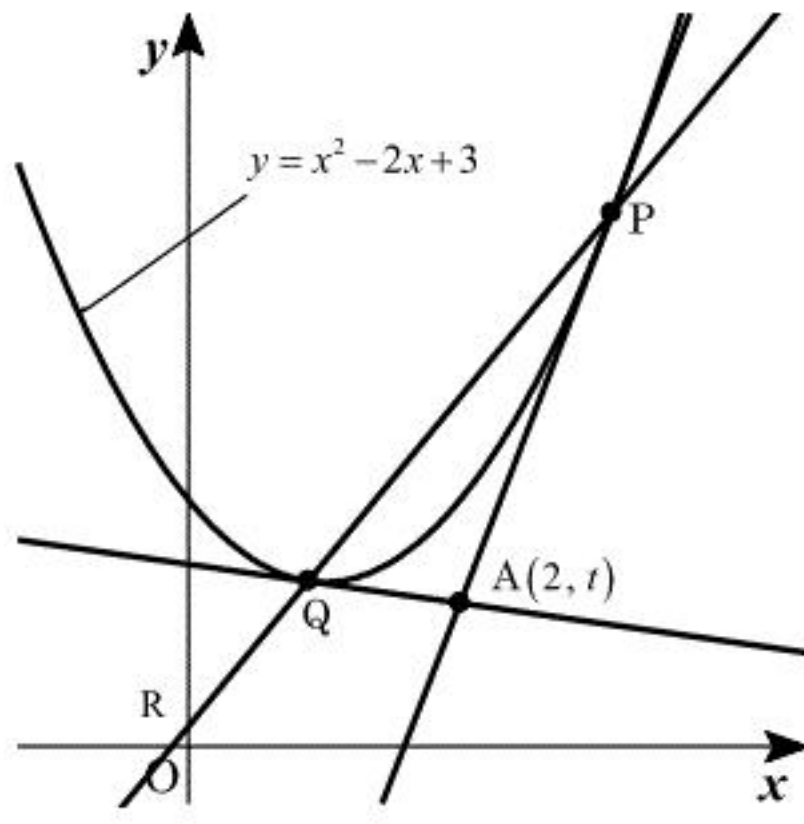


〔1〕



$$y = f(x) = x^2 - 2x + 3$$

とおく。 a を実数とすると、放物線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ \Leftrightarrow y &= (2a-2)(x-a) + a^2 - 2a + 3 \\ \therefore y &= (2a-2)x - a^2 + 3 \end{aligned}$$

とおける。この接線が点 $A(2, t)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} t &= (2a-2) \cdot 2 - a^2 + 3 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4a + t + 1 &= 0 \\ \therefore a &= 2 \pm \sqrt{3-t} \end{aligned}$$

である。2 接点のうち、 x 座標の大きなほうが点 P であるから、

点 P の x 座標は $2 + \sqrt{3-t}$ となる。

(答) $2 + \sqrt{3-t}$

〔2〕

p, q を実数として、

$$P(p, f(p)), Q(q, f(q))$$

とおくと、

$$\begin{cases} p = 2 + \sqrt{3-t} \\ q = 2 - \sqrt{3-t} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} p+q = 4 \\ pq = t+1 \end{cases}$$

である。したがって、直線 PQ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{f(p)-f(q)}{p-q}(x-p) + f(p) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{(p^2-2p+3)-(q^2-2q+3)}{p-q}(x-p) + f(p) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{(p-q)(p+q)-2(p-q)}{p-q}(x-p) + f(p) \\ \Leftrightarrow y &= (p+q-2)(x-p) + p^2 - 2p + 3 \\ \Leftrightarrow y &= (p+q-2)x - pq + 3 \\ \Leftrightarrow y &= (4-2)x - (t+1) + 3 \\ \therefore y &= 2x - t + 2 \end{aligned}$$

であるから、点 R の y 座標は $-t+2$ となる。

(答) $-t+2$

〔3〕

$$\overline{AP} = (p-2, f(p)-t)$$

$$\overline{AQ} = (q-2, f(q)-t)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overline{AP} \cdot \overline{AQ} &= (p-2)(q-2) + \{f(p)-t\}\{f(q)-t\} \\ &= pq - 2(p+q) + 4 + f(p)f(q) - t\{f(p)+f(q)\} + t^2 \\ &= (t+1) - 2 \cdot 4 + 4 + f(p)f(q) - t\{f(p)+f(q)\} + t^2 \\ &= f(p)f(q) - t\{f(p)+f(q)\} + t^2 + t - 3 \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} f(p)f(q) &= (p^2-2p+3)(q^2-2q+3) \\ &= (pq)^2 - 2pq(p+q) + 3(p^2+q^2) + 4pq - 6(p+q) + 9 \\ &= (pq)^2 - 2pq(p+q) + 3(p+q)^2 - 2pq - 6(p+q) + 9 \\ &= (t+1)^2 - 2(t+1) \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 - 2(t+1) - 6 \cdot 4 + 9 \\ &= (t+1)^2 - 10(t+1) + 33 \\ &= t^2 - 8t + 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(p)+f(q) &= (p^2-2p+3) + (q^2-2q+3) \\ &= (p+q)^2 - 2pq - 2(p+q) + 6 \\ &= 4^2 - 2(t+1) - 2 \cdot 4 + 6 \\ &= -2t + 12 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overline{AP} \cdot \overline{AQ} &= f(p)f(q) - t\{f(p)+f(q)\} + t^2 + t - 3 \\ &= (t^2 - 8t + 24) - t(-2t + 12) + t^2 + t - 3 \\ &= 4t^2 - 19t + 21 \\ &= (t-3)(4t-7) \end{aligned}$$

である。ベクトル $\overline{AP}$ と $\overline{AQ}$ が垂直のとき、 $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = 0$ であるから、 $t < 3$ より、

$$t_0 = \frac{7}{4}$$

となる。

(答) $t_0 = \frac{7}{4}$

〔4〕

点 R は直線 PQ 上の点であるから、

$$\alpha + \beta = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、 $t = t_0 = \frac{7}{4}$ のとき、

$$A\left(2, \frac{7}{4}\right), P\left(2 + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{17}{4} + \sqrt{5}\right), Q\left(2 - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{17}{4} - \sqrt{5}\right), R\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overline{AR} &= \alpha \overline{AP} + \beta \overline{AQ} \\ \Leftrightarrow \left(-2, -\frac{3}{2}\right) &= \alpha \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5} + \frac{5}{2}\right) + \beta \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{5} + \frac{5}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{2}\alpha - \frac{\sqrt{5}}{2}\beta = -2 \\ \left(\sqrt{5} + \frac{5}{2}\right)\alpha + \left(-\sqrt{5} + \frac{5}{2}\right)\beta = -\frac{3}{2} \end{cases} &\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。したがって①、②より、

$$\alpha = \frac{5-4\sqrt{5}}{10}, \beta = \frac{5+4\sqrt{5}}{10}$$

となる。

(答) $\alpha = \frac{5-4\sqrt{5}}{10}, \beta = \frac{5+4\sqrt{5}}{10}$

〔1〕

$$AC = CB$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2-a & -2-b \\ 5+4a & 5+4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -a & 3b \end{pmatrix}$$

$$\therefore a = -1, b = -5$$

となる。

(答) $a = -1, b = -5$

〔2〕

$$\det B = -3 \neq 0$$

$$\det C = b - a = -4 \neq 0$$

であるから、行列 B, C は逆行列を持つので、

$$AC = CB$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = CB^{-1}C^{-1}$$

と表すことができる。ここで、

$$B^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= (A^{-1})^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= (CB^{-1}C^{-1})^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= C(B^{-1})^n C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n \\ -3^n & -5 \cdot (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1)^n - \frac{1}{3^n} \\ -2 \cdot (-1)^n + \frac{5}{3^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad x_n = 2 \cdot (-1)^n - \frac{1}{3^n}, y_n = -2 \cdot (-1)^n + \frac{5}{3^n}$$

〔3〕

$$\text{OP}_n^2 = x_n^2 + y_n^2$$

$$= \left\{ 2 \cdot (-1)^n - \frac{1}{3^n} \right\}^2 + \left\{ -2 \cdot (-1)^n + \frac{5}{3^n} \right\}^2$$

$$= 8 + 8 \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{26}{9^n}$$

であるから、

$$\text{OP}_1^2 = 8 + 8 + \frac{26}{9} > 8.3$$

$$\text{OP}_2^2 = 8 - \frac{8}{3} + \frac{26}{9^2} < 8.3$$

$$\text{OP}_3^2 = 8 + \frac{8}{9} + \frac{26}{9^3} > 8.3$$

$$\text{OP}_4^2 = 8 - \frac{8}{27} + \frac{26}{9^4} < 8.3$$

である。また、 $n \geq 5$ のとき、

$$\text{OP}_n^2 = 8 + 8 \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{26}{9^n} \leq 8 + \frac{8}{81} + \frac{26}{9^5} < 8.3$$

であるから、 $\text{OP}_n > 8.3$ となるような n は、

$$n = 1, 3$$

である。

(答) $n = 1, 3$

〔1〕

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
&\Leftrightarrow \sin 3x + \sin x + \cos x = \cos 3x \\
&\Leftrightarrow 2 \sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} - 2 \sin \frac{x+3x}{2} \sin \frac{x-3x}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 2x \sin x = 0 \\
&\Leftrightarrow 2 \sin 2x (\sin x + \cos x) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \sin 2x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0
\end{aligned}$$

である。したがって、 m を整数とすると、

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
&\Leftrightarrow 2x = m\pi, x + \frac{\pi}{4} = m\pi \\
\therefore x &= \frac{m}{2}\pi, \left(m - \frac{1}{4} \right)\pi
\end{aligned}$$

である。ここで、 $0 \leq x \leq n\pi$ の範囲に $x = \frac{m}{2}\pi$ を満たす x は $2n+1$ 個存在し、

$x = \left(m - \frac{1}{4} \right)\pi$ を満たす x は n 個存在するので、

$$r = (2n+1) + n = 3n+1$$

となる。

(答) $r = 3n+1$

〔2〕

$$\begin{aligned}
f(x) &< g(x) \\
&\Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0 \\
&\Leftrightarrow \sin 2x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) < 0 \\
\therefore \frac{\pi}{2} &< x < \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{4}\pi$

〔3〕

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi |f(x) - g(x)| dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3x + \sin x + \cos x - \cos 3x) dx \\
&\quad - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin 3x + \sin x + \cos x - \cos 3x) dx + \int_{\frac{3}{4}\pi}^\pi (\sin 3x + \sin x + \cos x - \cos 3x) dx \\
&= \int_0^\pi (\sin 3x + \sin x + \cos x - \cos 3x) dx - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin 3x + \sin x + \cos x - \cos 3x) dx \\
&= \left[-\frac{1}{3} \cos 3x - \cos x + \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^\pi + \left[-\frac{1}{3} \cos 3x - \cos x + \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \\
&= \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) - 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} \right) + 2 \left(1 + \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{16 - 4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

となる。

(答) $I = \frac{16 - 4\sqrt{2}}{3}$

〔1〕

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2x} + (x+c) \cdot 2e^{2x} \\ &= e^{2x} (2x+2c+1) \end{aligned}$$

であるから、 $y=f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-c-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}e^{-2c-1}$	$\nearrow$

増減表より、 $y=f(x)$ は $x=-c-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}e^{-2c-1}$ をとることが分かるので、

$$k=-c-\frac{1}{2}, m=-\frac{1}{2}e^{-2c-1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k=-c-\frac{1}{2}, m=-\frac{1}{2}e^{-2c-1}$$

〔2〕

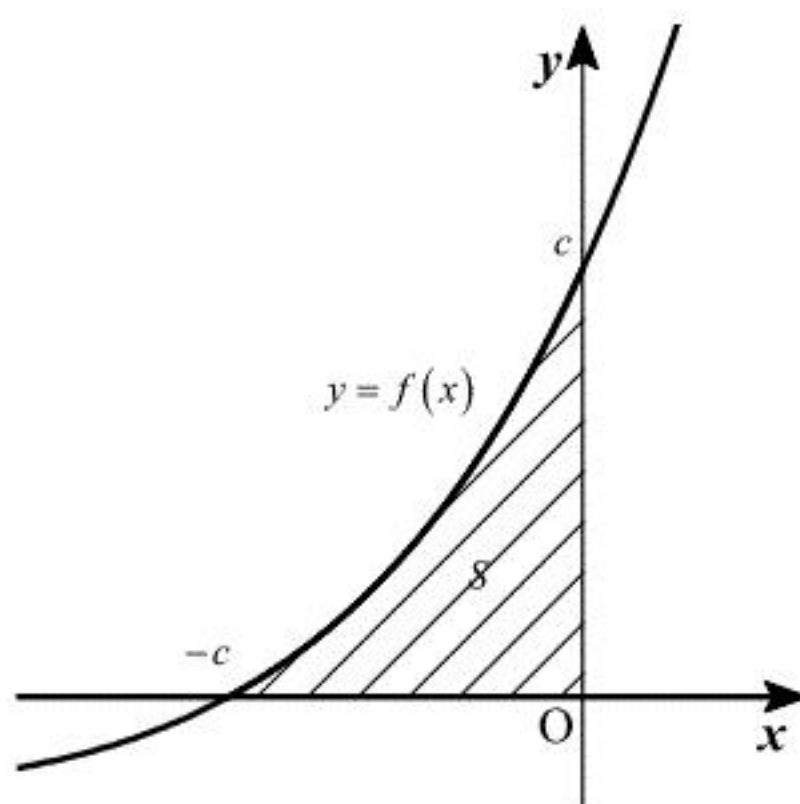
$k=-c-\frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} T &= \int_{-c-\frac{1}{2}}^{-c} (x+c)e^{2x} dx \\ &= \left[(x+c) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} \right]_{-c-\frac{1}{2}}^{-c} - \frac{1}{2} \int_{-c-\frac{1}{2}}^{-c} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{4}e^{-2c-1} - \frac{1}{4} \left[e^{2x} \right]_{-c-\frac{1}{2}}^{-c} \\ &= \frac{1}{4}(2-e)e^{-2c-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad T = \frac{1}{4}(2-e)e^{-2c-1}$$

〔3〕



前図より、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-c}^0 (x+c)e^{2x} dx \\ &= \left[(x+c) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} \right]_{-c}^0 - \frac{1}{2} \int_{-c}^0 e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2}c - \frac{1}{4} \left[e^{2x} \right]_{-c}^0 \\ &= \frac{1}{2}c - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2c} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S &= \frac{e}{2-e}T \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}c - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2c} &= \frac{e}{2-e} \cdot \frac{1}{4}(2-e)e^{-2c-1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}c - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2c} &= \frac{1}{4}e^{-2c} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}c - \frac{1}{4} &= 0 \\ \therefore c &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c = \frac{1}{2}$$