

平成23年度前期日程試験問題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は、4ページあります。
3. 問題は 1 ～ 4 の4題です。全問解答しなさい。
4. 試験開始後に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁がないことを確認し、ある場合には手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の針金綴じは、はずしてもかまいません。問題冊子の余白は下書き、計算用にしてもかまいません。
6. 解答用紙(別紙)は4枚(Aい～Aに)です。
7. 各解答用紙の指定欄に、受験番号を記入しなさい。
8. 解答は、必ず解答用紙の指定箇所に記入しなさい。
9. 解答用紙は、持ち帰ってははいけません。
10. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

11. 解答用紙の「〔1〕 解」, 「〔2〕 解」などで始まる空白部分に論証過程や途中計算を記述して解答しなさい。「答」欄には設問の答えを記入しなさい。
12. 設問に「答えのみでよい」という指示のある場合には、「答」欄に設問の答えのみを記入しなさい。

- 1 座標平面上に放物線 $y = x^2 - 2x + 3$ と点 $A(2, t)$ ($t < 3$) がある。この放物線に点 A から引いた 2 本の接線の接点をそれぞれ P, Q とする。ただし、 x 座標の大きな方を P とする。また、2 点 P, Q を通る直線と y 軸との交点を R とする。このとき、次の問いに答えよ。

〔1〕 点 P の x 座標を t の式で表せ。

〔2〕 点 R の y 座標を t の式で表せ。

〔3〕 ベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{AQ}$ が垂直になるような t の値を t_0 とする。 t_0 を求めよ。
ただし答えのみでよい。

〔4〕 $t = t_0$ のときの A, P, Q, R について、 $\overrightarrow{AR} = \alpha \overrightarrow{AP} + \beta \overrightarrow{AQ}$ と表す。 α, β の値を求めよ。ただし、 α, β は実数とする。

2 a, b を実数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えよ。

[1] $AC = CB$ が成り立つときの a, b を求めよ。ただし答えのみでよい。

[2] $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (A^{-1})^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ によって x_n, y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を定める。このとき、 x_n, y_n を n の式で表せ。ただし、 A^{-1} は A の逆行列である。

[3] x_n, y_n は [2] で求めたものとし、 O を原点とする xy 平面上の点 (x_n, y_n) を P_n とする。このとき、 $OP_n^2 > 8.3$ となるような n をすべて求めよ。

3

2つの関数

$$f(x) = \sin 3x + \sin x + \cos x, \quad g(x) = \cos 3x$$

について、次の問いに答えよ。

〔1〕 区間 $0 \leq x \leq n\pi$ における2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の交点の個数を r とする。 r を n の式で表せ。ただし、 n は正の整数とする。

〔2〕 区間 $0 \leq x \leq \pi$ において $f(x) < g(x)$ をみたす x の範囲を求めよ。

〔3〕 定積分

$$I = \int_0^{\pi} |f(x) - g(x)| dx$$

の値を求めよ。

4 c を正の実数とする。関数 $f(x) = (x + c)e^{2x}$ について、次の問いに答えよ。
ただし、 e は自然対数の底とする。

[1] $y = f(x)$ は $x = k$ のとき最小値 m をとる。このとき、 k と m を c の式で表せ。

[2] k を [1] で求めた値とする。このとき、定積分

$$T = \int_k^{-c} f(x) dx$$

を c の式で表せ。

[3] T を [2] で求めた値とする。区間 $-c \leq x \leq 0$ において、曲線 $y = f(x)$ 、 x 軸および y 軸のすべてで囲まれた部分の面積を S とする。
 $S = \frac{e}{2-e} T$ となるとき c の値を求めよ。