

1

[1]

$$\begin{aligned} ABAB &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b & a \\ 1-a & -b \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} b^2+a-a^2 & 0 \\ 0 & b^2+a-a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算できるので、 $ABAB=E$ のとき $b>0$ より

$$\begin{aligned} b^2+a-a^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow b &= \sqrt{1-a+a^2} \end{aligned}$$

と表せる。

(答) $b = \sqrt{1-a+a^2}$

[2]

[1] より $b = \sqrt{1-a+a^2}$ であることとハミルトン・ケーリーの定理を用いて

$$\begin{aligned} A^2 - \{a + (1-a)\}A + \{a(1-a) - b(-b)\}E &= 0 \\ \Leftrightarrow A^2 - A + (a - a^2 + b^2)E &= 0 \\ \Leftrightarrow A^2 &= A - E \end{aligned}$$

が得られる。よって、

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 - A = (A - E) - A = -E \\ A^4 &= (-E)A = -A \\ A^5 &= -A^2 = -A + E \\ A^6 &= (-A + E)A = -A^2 + A = -(A - E) + A = E \end{aligned}$$

より $A^n = E$ となる最小の n は 6 である。

(答) $n = 6$

[3]

$a=2$ のとき

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{1-2+2^2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

より

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

となる。したがって Q の座標は

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

より $Q(2+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$ となる。また R の座標は

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

より $R(1+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3})$ となる。以上から

$$\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}, \overline{PR} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

となるので

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| (1+\sqrt{3})(-3-\sqrt{3}) - \sqrt{3}(-2-\sqrt{3}) \right| \\ &= \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$

2

[1]

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \overline{p} \cdot \overline{a} \\
 &= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
 \overline{b} &= \overline{p} - \alpha \overline{a} \\
 &= \overline{p} - \overline{a} \\
 &= \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 1\right)
 \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overline{b} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 1\right)$$

[2]

$$\begin{aligned}
 \beta &= \overline{q} \cdot \overline{a} \\
 &= -1 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{q} \cdot \overline{b}}{|\overline{b}|^2} &= \frac{-1 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) + 2 \cdot 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 1^2} \\
 &= \frac{1}{\frac{4}{3}} \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
 \overline{c} &= \overline{q} - \beta \overline{a} - \frac{\overline{q} \cdot \overline{b}}{|\overline{b}|^2} \overline{b} \\
 &= \overline{q} - \overline{a} - \frac{3}{4} \overline{b} \\
 &= (-1, \sqrt{3}, 2) - \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 1\right) \\
 &= \left(-\frac{15}{8}, \frac{5\sqrt{3}}{8}, \frac{5}{4}\right)
 \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overline{c} = \left(-\frac{15}{8}, \frac{5\sqrt{3}}{8}, \frac{5}{4}\right)$$

[3]

$$\begin{aligned}
 \overline{a} \cdot \overline{b} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 1\right) = 0 \\
 \overline{a} \cdot \overline{c} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \cdot \left(-\frac{15}{8}, \frac{5\sqrt{3}}{8}, \frac{5}{4}\right) = 0 \\
 \overline{b} \cdot \overline{c} &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 1\right) \cdot \left(-\frac{15}{8}, \frac{5\sqrt{3}}{8}, \frac{5}{4}\right) = 0
 \end{aligned}$$

より $\overline{a} \perp \overline{b}$, $\overline{a} \perp \overline{c}$, $\overline{b} \perp \overline{c}$ となる。したがって四面体 OABC は、 $\triangle \text{OAB}$ を底面とみると、底面は OA と OB が垂直に交わる直角三角形であり、かつ OC は $\triangle \text{OAB}$ と垂直に交わる三角錐であることが分かる。よって、四面体 OABC の体積 V は

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle \text{OAB} \cdot \text{OC} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \|\overline{a}\| \|\overline{b}\|\right) \cdot |\overline{c}| \\
 &= \frac{1}{6} \|\overline{a}\| \|\overline{b}\| |\overline{c}|
 \end{aligned}$$

と表される。

$$\begin{aligned}
 |\overline{a}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2} = 1 \\
 |\overline{b}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 1^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\
 |\overline{c}| &= \sqrt{\left(-\frac{15}{8}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

より求める体積は

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{5}{2} \\
 &= \frac{5\sqrt{3}}{18}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{5\sqrt{3}}{18}$$

[1]

$1 \leq x \leq 4$ において $f(x) \geq 0$ より、求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi \left(\sqrt{4x - x^2} \right)^2 dx \\ &= \pi \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^4 \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $V = 9\pi$

[2]

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 &= 4x - x^2 - x \log \frac{4}{x} \\ &= 4x - x^2 - x \log 4 + x \log x \\ &= x(4 - x - \log 4 + \log x) \end{aligned}$$

となる。 $1 \leq x \leq 4$ なので $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2$ の正負は $4 - x - \log 4 + \log x$ の正負で決まる。ここ

で $h(x) = 4 - x - \log 4 + \log x$ とおくと

$$h'(x) = -1 + \frac{1}{x}$$

となる。 $1 \leq x \leq 4$ から $h'(x) \leq 0$ となるので $h(x)$ は $x = 4$ のとき最小値

$$\begin{aligned} h(4) &= 4 - 4 - \log 4 + \log 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって $h(x) \geq 0$ となり、 $1 \leq x \leq 4$ において $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \geq 0$ が示せた。

(証明終)

[3]

[2] の結果を用いると、求める体積は

$$\begin{aligned} W &= \int_1^4 \pi \left[\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \right] dx \\ &= \int_1^4 \pi \{f(x)\}^2 dx - \int_1^4 \pi \{g(x)\}^2 dx \end{aligned}$$

となる。[1] の結果から $\int_1^4 \pi \{f(x)\}^2 dx = 9\pi$ となるので $\int_1^4 \pi \{g(x)\}^2 dx$ を求めると

$$\begin{aligned} \int_1^4 \pi \{g(x)\}^2 dx &= \pi \int_1^4 x \log \frac{4}{x} dx \\ &= \pi \int_1^4 x \log 4 dx - \pi \int_1^4 x \log x dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \log 4 \right]_1^4 - \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \log x dx \\ &= \frac{15}{2} \pi \log 4 - \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^4 + \pi \int_1^4 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{15}{2} \pi \log 4 - 8\pi \log 4 + \pi \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^4 \\ &= -\frac{1}{2} \pi \log 4 + \frac{15}{4} \pi \\ &= \left(\frac{15}{4} - \log 2 \right) \pi \end{aligned}$$

となる。以上から求める体積は

$$\begin{aligned} W &= 9\pi - \left(\frac{15}{4} - \log 2 \right) \pi \\ &= \left(\frac{21}{4} + \log 2 \right) \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $W = \left(\frac{21}{4} + \log 2 \right) \pi$

与えられた関数の積分を実行すると

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x \sin(x-t) \cos 2t \, dt + \int_x^{2\pi} \sin(t-x) \cos 2t \, dt + \frac{2}{3} \cos x \\
 &= \int_0^x \sin(x-t) \cos 2t \, dt - \int_x^{2\pi} \sin(x-t) \cos 2t \, dt + \frac{2}{3} \cos x \\
 &= \int_0^x \frac{1}{2} \{ \sin(x+t) + \sin(x-3t) \} \, dt - \int_x^{2\pi} \frac{1}{2} \{ \sin(x+t) + \sin(x-3t) \} \, dt + \frac{2}{3} \cos x \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\cos(x+t) + \frac{1}{3} \cos(x-3t) \right]_0^x \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left[-\cos(x+t) + \frac{1}{3} \cos(x-3t) \right]_x^{2\pi} + \frac{2}{3} \cos x \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ -\cos 2x + \frac{1}{3} \cos(-2x) + \cos x - \frac{1}{3} \cos x \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left\{ -\cos x + \frac{1}{3} \cos x + \cos 2x - \frac{1}{3} \cos(-2x) \right\} + \frac{2}{3} \cos x \\
 &= \frac{1}{3} (\cos x - \cos 2x) - \frac{1}{3} (-\cos x + \cos 2x) + \frac{2}{3} \cos x \\
 &= \frac{4}{3} \cos x - \frac{2}{3} \cos 2x \\
 &= \frac{4}{3} \cos x - \frac{2}{3} (2 \cos^2 x - 1)
 \end{aligned}$$

となる。ここで $\cos x = u$ とおくと

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\frac{4}{3} u^2 + \frac{4}{3} u + \frac{2}{3} \\
 &= -\frac{4}{3} \left(u - \frac{1}{2} \right)^2 + 1
 \end{aligned}$$

のように表せる。 $\cos x = u$, $0 \leq x \leq 1$ より $-1 \leq u \leq 1$ なので $f(x)$ は $u = \frac{1}{2}$ のとき最大値 1

を, $u = -1$ のとき最小値 -2 をとる。 $u = \frac{1}{2}$ となるのは

$$\begin{aligned}
 \cos x &= \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}
 \end{aligned}$$

のときであり, また $u = -1$ となるのは

$$\begin{aligned}
 \cos x &= -1 \\
 \Leftrightarrow x &= \pi
 \end{aligned}$$

のときである。以上から, $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ のとき最大値 1 を, $x = \pi$ のとき最小値 -2 をとる。

(答) $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ のとき最大値 1 をとる

$x = \pi$ のとき最小値 -2 をとる