

平成24年度前期日程試験問題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は、4 ページあります。
3. 問題は **1** ～ **4** の 4 題です。全問解答しなさい。
4. 試験開始後に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁がないことを確認し、ある場合には手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の針金綴じは、はずしてもかまいません。問題冊子の余白は下書き、計算用にしてもかまいません。
6. 解答用紙(別紙)は 4 枚(Aい～Aに)です。
7. 各解答用紙の指定欄に、受験番号を記入しなさい。
8. 解答は、必ず解答用紙の指定箇所に記入しなさい。
9. 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
10. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

11. 解答用紙の「〔1〕 解」, 「解」などで始まる空白部分に論証過程や途中計算を記述して解答しなさい。「答」欄には設問の答えを記入しなさい。
12. 解答用紙の「〔2〕 証明」で始まる空白部分には対応する設問の証明を記述しなさい。

1 a, b は実数で $b > 0$ とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 1-a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が $ABAB = E$ を満たしている。ただし E は 2 次の単位行列とする。次の問いに答えよ。

〔1〕 b を a の式で表せ。

〔2〕 n を自然数とする。 $A^n = E$ を満たす最小の n を求めよ。

〔3〕 座標平面上において、 $a = 2$ のとき行列 A の表す 1 次変換を f とおく。

点 $P(1, 1)$ が f によって移る点を Q とし、 Q が f によって移る点を R とする。このとき $\triangle PQR$ の面積 S を求めよ。

2 空間のベクトル $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ を

$$\vec{a} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \vec{p} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right), \vec{q} = (-1, \sqrt{3}, 2)$$

で定める。また $\alpha = \vec{p} \cdot \vec{a}$, $\beta = \vec{q} \cdot \vec{a}$ とおく。次の問いに答えよ。

〔1〕 $\vec{b} = \vec{p} - \alpha \vec{a}$ とする。 $\vec{b}$ を成分で表せ。

〔2〕 $\vec{c} = \vec{q} - \beta \vec{a} - \frac{\vec{q} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ とする。 $\vec{c}$ を成分で表せ。

〔3〕 座標空間の原点を O とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ となる 3 点 A , B , C に対して、四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ。

3 区間 $1 \leq x \leq 4$ で定められた関数

$$f(x) = \sqrt{4x - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x \log \frac{4}{x}}$$

について、次の問いに答えよ。ただし対数は自然対数とする。

- [1] 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれた部分を、 x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。
- [2] 区間 $1 \leq x \leq 4$ において $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \geq 0$ が成り立つことを示せ。
- [3] 2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ と直線 $x = 1$ で囲まれた部分を D とおく。 D を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 W を求めよ。

4 区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で定められた関数

$$f(x) = \int_0^{2\pi} (\sin |x - t|) \cos 2t \, dt + \frac{2}{3} \cos x$$

の最大値, 最小値を求めよ。また, 最大値を与える x の値と最小値を与える x の値をすべて求めよ。