

1

[1]

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{より, } P^{-1} = \frac{1}{-2 - (-3)} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2a+6 & -3 \\ a-2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2a+9 & -6a+24 \\ a-4 & 3a-10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって、 $(1, 2)$ 成分と $(2, 1)$ 成分が等しくなるのは

$$\begin{aligned} -6a+24 &= a-4 \\ \Leftrightarrow a &= 4 \end{aligned}$$

のときである。

(答) $a = 4$

[2]

[1] の結果より、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ であることがわかる。各辺を n 乗すると、

$$(\text{左辺}) = (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

$$(\text{右辺}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

となるから、

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot 2^n \\ -1 & -2 \cdot 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2+3 \cdot 2^n & -3+3 \cdot 2^n \\ 2-2^{n+1} & 3-2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と A^n が求められる。

$$(\text{答}) \begin{pmatrix} -2+3 \cdot 2^n & -3+3 \cdot 2^n \\ 2-2^{n+1} & 3-2^{n+1} \end{pmatrix}$$

[3]

点 Q , R が1次変換 A_n によって移る点の座標は、それぞれ

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2+3 \cdot 2^n & -3+3 \cdot 2^n \\ 2-2^{n+1} & 3-2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2+3 \cdot 2^n & -3+3 \cdot 2^n \\ 2-2^{n+1} & 3-2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6+3 \cdot 2^{n+1} \\ 6-2^{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。したがって、直線 L_n の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{6-2^{n+2} - (-1)}{-6+3 \cdot 2^{n+1} - 1} (x-1) - 1 \\ &= \frac{-2^{n+2} + 7}{3 \cdot 2^{n+1} - 7} x - \frac{2^{n+1}}{3 \cdot 2^{n+1} - 7} \end{aligned}$$

となるから、 $y_n = -\frac{2^{n+1}}{3 \cdot 2^{n+1} - 7}$ である。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{3 - \frac{7}{2^{n+1}}} = -\frac{1}{3}$$

と求められる。

(答) $-\frac{1}{3}$

[1]

与えられた球面の方程式へ $x = \frac{1}{2}$ を代入すると,

$$y^2 + (z-2)^2 = 9 - \frac{1}{4} = \frac{35}{4}$$

と変形できる。したがって、 C の中心の座標は $\left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$ 、半径は $\frac{\sqrt{35}}{2}$ である。

(答) 中心の座標: $\left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$, 半径: $\frac{\sqrt{35}}{2}$

[2]

$\overline{OR} = \overline{OP} + k\overline{PQ}$ とすると,

$$\overline{OR} = (0, 0, 5) + k\left(\frac{1}{2}, s, t-5\right)$$

と表すことができる。一方、題意より、 $\overline{OR} = (X, Y, 0)$ の形に表されるから、

$$X = \frac{1}{2}k \quad \dots \textcircled{1}$$

$$Y = ks \quad \dots \textcircled{2}$$

$$0 = k(t-5) + 5 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。 $t=5$ とすると、 $\textcircled{3}$ 式において $0=5$ と矛盾が生じるため、 $t \neq 5$ である。したがって、

$\textcircled{3}$ 式より $k = \frac{5}{5-t}$ がわかり、これらを X および Y へ代入することによって、

$$X = \frac{5}{2(5-t)}$$

$$Y = \frac{5s}{5-t}$$

となる。

(答) $X = \frac{5}{2(5-t)}$, $Y = \frac{5s}{5-t}$

[3]

点 $Q\left(\frac{1}{2}, s, t\right)$ は円 C 上の点であるから、 $s^2 + (t-2)^2 = \frac{35}{4}$ を満たす。[2] の結果より、

$X = \frac{5}{2(5-t)} \neq 0$ を考慮すれば、

$$5X - tX = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5(2X-1)}{2X}$$

および、

$$\begin{aligned} s &= \frac{(5-t)Y}{5} \\ &= \frac{Y}{2X} \end{aligned}$$

がわかる。これらを代入して、

$$\left(\frac{Y}{2X}\right)^2 + \left(\frac{5(2X-1)}{2X} - 2\right)^2 = \frac{35}{4}$$

$$\Leftrightarrow Y^2 + (6X-5)^2 = 35X^2$$

$$\Leftrightarrow X^2 + Y^2 - 60X = -25$$

$$\Leftrightarrow (X-30)^2 + Y^2 = 875$$

となるため、 C' は半径 $\sqrt{875} = 5\sqrt{35}$ の円となる。したがって、

$$\begin{aligned} L &= 2\pi \cdot 5\sqrt{35} \\ &= 10\pi\sqrt{35} \end{aligned}$$

となる。

(答) $10\pi\sqrt{35}$

[1]

(1)

合成関数の微分法を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(2)

$g(x) = x - f(x)$ とおくと、 $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$ (等号は $x=0$ のときのみ成立) である。また、

$g(0) = 0$ であるから、 $0 < x < \frac{3}{4}$ の範囲では直線 $y = x$ が曲線 $y = f(x)$ の上側にある。よって

求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{3}{4}} \left\{ x - \log(x + \sqrt{x^2+1}) \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{3}{4}} x dx - \int_0^{\frac{3}{4}} \log(x + \sqrt{x^2+1}) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{3}{4}} - \left\{ \left[x \log(x + \sqrt{x^2+1}) \right]_0^{\frac{3}{4}} - \int_0^{\frac{3}{4}} x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \right\} \\ &= \frac{9}{32} - \frac{3}{4} \log 2 + \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{17}{32} - \frac{3}{4} \log 2 \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \frac{17}{32} - \frac{3}{4} \log 2$$

[2]

(1)

2倍角の公式および3倍角の公式を利用することにより、

$$\begin{aligned} 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1 \\ \Leftrightarrow (\cos \alpha - 1)(4\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha - 1) &= 0 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 α は鋭角であるから、 $0 < \cos \alpha < 1$ である。したがって、

$$\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1 \\ &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \cos 2\alpha = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

(2)

内積の値は、

$$\begin{aligned} T &= \overline{\text{OP}} \cdot \overline{\text{OQ}} \\ &= |\overline{\text{OP}}| |\overline{\text{OQ}}| \cos(N\alpha) \\ &= (\sqrt{1+3})^2 \cos(N\alpha) \\ &= 4\cos(N\alpha) \end{aligned}$$

である。 $\alpha = \frac{2}{5}\pi$ であるから、 $\cos(N\alpha)$ について、 $N=2, 3, 7, 8, 12$ の場合と、 $N=4, 6, 9, 11$

の場合と、 $N=5, 10$ の場合の値は、それぞれ $\cos 2\alpha, \cos \alpha, 1$ と等しくなる。

ここで、2つのサイコロの目の和の確率分布は以下の表に示すとおりである。

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

したがって、求める期待値は、

$$\begin{aligned} &4 \left(\frac{1+2+6+5+1}{36} \cos 2\alpha + \frac{3+5+4+2}{36} \cos \alpha + \frac{4+3}{36} \cdot 1 \right) \\ &= \frac{5}{3} \cos 2\alpha + \frac{14}{9} \cos \alpha + \frac{7}{9} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{36} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{36}$$

4

[1]

2倍角の公式を用いて変形すると、

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 x} (1 - \tan^2 x) \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

[2]

$k = -\frac{4}{3}$ を代入した上で C_1 と C_2 の共有点の座標を求めると、

$$\begin{aligned}t + \frac{\sqrt{3}}{3} &= -\frac{4\sqrt{3}}{3} \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} - \frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow t + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}(1 - 3t^2)}{3(1 + t^2)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}t)(t - \sqrt{3})^2}{3(1 + t^2)} &= 0\end{aligned}$$

であるから、 $t = \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 、 $\sqrt{3}$ となる x において共有点をもつことがわかる。このときの

x はそれぞれ $-\frac{\pi}{6}$ および $\frac{\pi}{3}$ であり、また、区間 $-\frac{\pi}{6} < t < \frac{\pi}{3}$ において

$t + \frac{\sqrt{3}}{3} > -\frac{4\sqrt{3}}{3} \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} - \frac{1}{2} \right)$ が成立するから、求める面積 S は、

$$\begin{aligned}S &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left\{ \tan x + \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) \left(\cos 2x - \frac{1}{2} \right) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left\{ -\frac{(\cos x)'}{\cos x} + \frac{4\sqrt{3}}{3} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} dx \\ &= \left[-\log |\cos x| + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{3} x \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(-\log \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{9} \pi \right) - \left(-\log \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{18} \pi \right) \\ &= \frac{1}{2} \log 3 + 2 - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \log 3 + 2 - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi$$

[3]

[2] と同様にして変形すると、

$$\begin{aligned}t + \frac{\sqrt{3}}{3} &= \sqrt{3}k \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} - \frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow t + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}k(1 - 3t^2)}{2(1 + t^2)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}t)(2t^2 + 3\sqrt{3}kt + 2 - 3k)}{6(1 + t^2)} &= 0\end{aligned}$$

となる。この方程式は $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ を必ず解に持つから、2次方程式 $2t^2 + 3\sqrt{3}kt + 2 - 3k = 0$ が

$t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 以外の解をもたない条件を考えればよい。

[1] 2次方程式 $2t^2 + 3\sqrt{3}kt + 2 - 3k = 0$ が $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ を解にもつとき

$t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} - 3k + 2 - 3k &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

となる。このとき、2次方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}D &= 27 \cdot \frac{16}{81} - 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{16}{3} - \frac{16}{3} \\ &= 0\end{aligned}$$

となるから、 $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ は重解であり、この他の解をもたないことが分かる。

[2] 2次方程式 $2t^2 + 3\sqrt{3}kt + 2 - 3k = 0$ が実数解をもたないとき

判別式を D とすると、 $D < 0$ となればよい。したがって、

$$\begin{aligned}D &= 27k^2 + 24k - 16 < 0 \\ \Leftrightarrow (9k - 4)(3k + 4) &< 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{4}{9}\end{aligned}$$

と k の範囲が求められる。

以上より [1][2] を合わせて、求める範囲は $-\frac{4}{3} < k \leq \frac{4}{9}$ である。

$$(\text{答}) \quad -\frac{4}{3} < k \leq \frac{4}{9}$$