

平成25年度前期日程試験問題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は、4ページあります。
3. 問題は **1** ～ **4** の4題です。全問解答しなさい。
4. 試験開始後に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁がないことを確認し、ある場合には手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の針金綴じは、はずしてもかまいません。問題冊子の余白は下書き、計算用に使ってもかまいません。
6. 解答用紙(別紙)は4枚(Aい～Aに)です。
7. 各解答用紙の指定欄に、受験番号を記入しなさい。
8. 解答は、必ず解答用紙の指定箇所に記入しなさい。
9. 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
10. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

11. 解答用紙の「〔1〕 解」、〔2〕 解」などで始まる空白部分に論証過程や途中計算がわかるように記述して解答しなさい。「答」欄には設問の答えを記入しなさい。
12. 設問に「答えのみでよい」という指示のある場合には、「答」欄に設問の答えのみを記入しなさい。

1 a を実数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えよ。

〔1〕 $P^{-1}AP$ の $(1, 2)$ 成分と $(2, 1)$ 成分が等しくなるような a の値を求めよ。ただし答えのみでよい。

〔2〕 a を〔1〕で求めた値とすると、自然数 n に対して A^n を求めよ。

〔3〕 a を〔1〕で求めた値とすると、 A^n が表す 1 次変換によって、 xy 平面上の 2 点 $Q(1, -1)$ と $R(0, 2)$ とが移る 2 点を通る直線を L_n とおく。 L_n の y 切片を y_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を求めよ。

2 xyz 空間に点 $P(0, 0, 5)$ がある。次の問いに答えよ。

- [1] 球面 $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 9$ と平面 $x = \frac{1}{2}$ が交わってできる円を C とする。 C の中心の座標と半径を求めよ。
- [2] C 上に点 $Q\left(\frac{1}{2}, s, t\right)$ をとったとき、2 点 P, Q を通る直線と xy 平面との交点を $R(X, Y, 0)$ とする。 X, Y それぞれを s, t の式で表せ。
- [3] Q が C 上のすべての点を動くとき、 R が描く曲線を C' とする。 C' の長さ L を求めよ。

3

次の問いに答えよ。

[1] $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ とする。ただし、対数は自然対数とする。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし答えのみでよい。

(2) 直線 $y = x$ と直線 $x = \frac{3}{4}$ および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

[2] $\alpha = \frac{2}{5}\pi$ とする。

(1) $\cos 3\alpha = \cos 2\alpha$ が成り立つことを用いて、 $\cos \alpha$ と $\cos 2\alpha$ の値を求めよ。ただし答えのみでよい。

(2) 2 個のさいころを同時に投げるとき、出る目の数の和を N とする。このとき、座標平面上の点 $P(1, \sqrt{3})$ を原点 O のまわりに角 $N\alpha$ だけ回転した点を Q とし、 $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の内積を T とする。 T の期待値を求めよ。

4 xy 平面上に 2 つの曲線

$$C_1: y = \tan x + \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C_2: y = \sqrt{3} k \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

がある。ただし k は実数とする。このとき、次の問いに答えよ。

[1] $t = \tan x$ とおく。 $\cos 2x$ を t の式で表せ。ただし答えのみでよい。

[2] $k = -\frac{4}{3}$ のとき、 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

[3] C_1 と C_2 の共有点の個数が 1 になるときの k の範囲を求めよ。