

1

[1]

点Fが球面の中心であるとき

$$|\overline{OF}|=|\overline{AF}|=|\overline{BF}|=|\overline{CF}|$$

となる。 $|\overline{OF}|, |\overline{AF}|, |\overline{BF}|, |\overline{CF}| > 0$ であるから

$$\begin{aligned} |\overline{OF}| &= |\overline{AF}| = |\overline{BF}| = |\overline{CF}| \\ \Leftrightarrow |\overline{OF}|^2 &= |\overline{AF}|^2 = |\overline{BF}|^2 = |\overline{CF}|^2 \end{aligned}$$

となる。 $\overline{OF} = (x, y, z)$ とおくと

$$\begin{aligned} |\overline{OF}|^2 &= |\overline{AF}|^2 = |\overline{BF}|^2 = |\overline{CF}|^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} |\overline{OF}|^2 = |\overline{AF}|^2 \\ |\overline{OF}|^2 = |\overline{BF}|^2 \\ |\overline{OF}|^2 = |\overline{CF}|^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x-2)^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x=1, y=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるから

$$\overline{OF} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

である。よって、 $\overline{OD}$ と $\overline{OF}$ のなす角を θ とすると

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{OD} \cdot \overline{OF}}{|\overline{OD}| \cdot |\overline{OF}|} \\ &= \frac{r + \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r}{\sqrt{r^2 + r^2 + r^2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

[2]

A(2, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1), D(r, r, r) であることより

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= (2, 0, 0) \\ \overline{AB} &= (-2, 1, 0) \\ \overline{AC} &= (-2, 0, 1) \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} \overline{OE} &= \overline{OA} + s(\overline{AB} + \overline{AC}) \\ &= (2 - 4s, s, s) \end{aligned}$$

となる。これより

$$\overline{DE} = (2 - 4s - r, s - r, s - r) \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから、 $\overline{DE} \cdot \overline{AB} = 0$ が成り立つとき

$$\begin{aligned} (2 - 4s - r) \cdot (-2) + (s - r) \cdot 1 + (s - r) \cdot 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow 9s + r - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{4 - r}{9} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{4 - r}{9}$$

[3]

[2] の結果より、 $\overline{DE} \cdot \overline{AB} = 0$ が成り立つとき

$$s = \frac{4 - r}{9} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①より

$$|\overline{DE}|^2 = (2 - 4s - r)^2 + (s - r)^2 + (s - r)^2$$

であるから、②より

$$\begin{aligned} |\overline{DE}|^2 &= \left(2 - 4 \cdot \frac{4 - r}{9} - r\right)^2 + \left(\frac{4 - r}{9} - r\right)^2 + \left(\frac{4 - r}{9} - r\right)^2 \\ &= \left(\frac{2 - 5r}{9}\right)^2 + \left(\frac{4 - 10r}{9}\right)^2 + \left(\frac{4 - 10r}{9}\right)^2 \\ &= \frac{1}{81}(36 - 180r + 225r^2) \\ &= \frac{1}{81}(6 - 15r)^2 \end{aligned}$$

となる。 $|\overline{DE}| = r$ をみたすとき、 $r > 0$ であるから

$$\frac{1}{81}(6 - 15r)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。さらに

$$\overline{DB} = (-r, 1 - r, -r)$$

であるから、 $\overline{DB} \cdot \overline{OD} < 0$ を満たすとき

$$\begin{aligned} \overline{DB} \cdot \overline{OD} &< 0 \\ \Leftrightarrow (-r) \cdot r + (1 - r) \cdot r + (-r) \cdot r &< 0 \\ \Leftrightarrow -3r^2 + r &< 0 \\ \Leftrightarrow r(3r - 1) &> 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < r \quad (\because r > 0) \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。よって、③より

$$\begin{aligned} \frac{1}{81}(6 - 15r)^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow (6 - 15r)^2 - 81r^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(6 - 15r) + 9r\} \{(6 - 15r) - 9r\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (r - 1)(4r - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow r = 1, \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であり、④より求める r の値は $r = 1$ となる。

$$(\text{答}) \quad r = 1$$

[1]

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4a+3b & 4b-3a \\ a^2+b^2 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。 A, B が

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たすとき

$$\begin{cases} 4a+3b=10 \\ 4b-3a=5 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$$

となる。これを満たす a, b の値は $a=1, b=2$ となる。

(答) $a=1, b=2$

[2]

$S_1'(a_1, b_1), S_2'(a_2, b_2)$ とおくと

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4m \\ m \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3n \\ 2n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。また、2点 S_1, S_2 を通る直線は

$$y = -\frac{n}{m}(x-m) \quad (\because m \neq 0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。2点 S_1', S_2' を通る直線がこれと一致するとき、 S_1', S_2' は直線①上に存在するから

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} m = -\frac{n}{m}(4m-m) \\ 2n = -\frac{n}{m}(3n-m) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m = -3n \\ 3n^2 + mn = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow n = -\frac{1}{3}m \quad (\because n \neq 0)
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $n = -\frac{1}{3}m$

[3]

2点 $T_1(-7, 0), T_2(0, 7)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$x - y + 7 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。また、 $T_1'(a_3, b_3), T_2'(a_4, b_4)$ とおくと

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。よって、2点 T_1', T_2' を通る直線 ℓ' の方程式は

$$x - 3y - 35 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。直線が円と異なる2点で交わるのは、円の中心と直線との距離が半径より小さくなる
ときである。②より、直線 ℓ と円 C が異なる2点で交わるのは

$$\begin{aligned}
 &\frac{|0+0-7|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} < r \\
 &\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{2}} < r \quad \cdots \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

のときであり、③より、直線 ℓ' と円 C が異なる2点で交わるのは

$$\begin{aligned}
 &\frac{|0-3\cdot 0-35|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} < r \\
 &\Leftrightarrow \frac{35}{\sqrt{10}} < r \quad \cdots \textcircled{5}
 \end{aligned}$$

のときである。以上より、直線 ℓ, ℓ' がともに円 C と異なる2点で交わるのは、④かつ⑤より

$$\frac{35}{\sqrt{10}} < r \quad \cdots \textcircled{6}$$

のときである。

(答) $\frac{35}{\sqrt{10}} < r$

[4]

原点を O 、円 C と ℓ の交点を P, Q 、円 C と ℓ' の交点を P', Q' とすると

$$OP = OQ = OP' = OQ' = r, PQ = L, P'Q' = L'$$

である。 O から ℓ, ℓ' に下ろした垂線の足を H, H' とすると、 $\triangle OPQ, \triangle OP'Q'$ は二等辺三角形であるから

$$PH = QH = \frac{L}{2}, P'H' = Q'H' = \frac{L'}{2}$$

となる。[3]の結果より

$$OH = \frac{7}{\sqrt{2}}, OH' = \frac{35}{\sqrt{10}}$$

であるから、三平方の定理より

$$\begin{aligned}
 OP^2 &= OH^2 + PH^2 \\
 \Leftrightarrow r^2 &= \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow L^2 &= 4r^2 - 98 \\
 OP'^2 &= OH'^2 + P'H'^2 \\
 \Leftrightarrow r^2 &= \left(\frac{35}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{L'}{2}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow L'^2 &= 4r^2 - 490
 \end{aligned}$$

となる。⑥のとき

$$\begin{aligned}
 L^2 &= 4r^2 - 98 \\
 &> 4\left(\frac{35}{\sqrt{10}}\right)^2 - 98 \\
 &= 392
 \end{aligned}$$

であり、 $19^2 < 392 < 20^2$ であるから L がとり得る最も小さい自然数は20となる。このとき

$$\begin{aligned}
 20^2 &= 4r^2 - 98 \\
 \Leftrightarrow 4r^2 &= 498
 \end{aligned}$$

となるから、求める $L'(>0)$ の値は

$$\begin{aligned}
 L' &= \sqrt{4r^2 - 490} \\
 &= \sqrt{498 - 490} \\
 &= 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

である。

(答) $L' = 2\sqrt{2}$

[1]

$\overline{CA} = (e^{-\theta}, e^{-\theta})$, $\overline{CB} = (\cos \theta - \sqrt{3}, \sin \theta)$ であるから, $\triangle ABC$ の面積 $F(\theta)$ は

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{CA}|^2 |\overline{CB}|^2 - (\overline{CA} \cdot \overline{CB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ (e^{-\theta})^2 + (e^{-\theta})^2 \right\} \left\{ (\cos \theta - \sqrt{3})^2 + \sin^2 \theta \right\} - \left\{ e^{-\theta} (\cos \theta - \sqrt{3}) + e^{-\theta} \sin \theta \right\}^2} \\ &= \frac{e^{-\theta}}{2} \sqrt{(\cos \theta - \sin \theta - \sqrt{3})^2} \\ &= \frac{e^{-\theta}}{2} |\cos \theta - \sin \theta - \sqrt{3}| \end{aligned}$$

となる。

$$\cos \theta - \sin \theta - \sqrt{3} = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{3}{4} \pi \right) - \sqrt{3}$$

であり

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{3}{4} \pi \right) \leq \sqrt{2} (< \sqrt{3})$$

であるから

$$\cos \theta - \sin \theta - \sqrt{3} = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{3}{4} \pi \right) - \sqrt{3} < 0$$

となる。よって

$$F(\theta) = \frac{e^{-\theta}}{2} (\sqrt{3} + \sin \theta - \cos \theta)$$

である。

$$(\text{答}) \quad F(\theta) = \frac{e^{-\theta}}{2} (\sqrt{3} + \sin \theta - \cos \theta)$$

[2]

$$\begin{aligned} F'(\theta) &= -\frac{e^{-\theta}}{2} (\sqrt{3} + \sin \theta - \cos \theta) + \frac{e^{-\theta}}{2} (\cos \theta + \sin \theta) \\ &= e^{-\theta} \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

である。区間 $0 < \theta < 2\pi$ において $F'(\theta) = 0$ となるのは

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6} \pi$$

のときである。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6} \pi$$

[3]

[2] の結果を用いて, $2(n-1)\pi \leq \theta \leq 2n\pi$ における関数 $F(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	$2(n-1)\pi$	$\cdots$	$2(n-1)\pi + \frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$2(n-1)\pi + \frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	$2n\pi$
$F'(\theta)$	+	+	0	-	0	+	+
$F(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

このとき

$$F(2(n-1)\pi) < F\left(2(n-1)\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$F\left(2(n-1)\pi + \frac{11}{6}\pi\right) < F(2n\pi)$$

である。また

$$F(2(n-1)\pi) = \frac{e^{-2(n-1)\pi}}{2} (\sqrt{3} - 1)$$

$$F(2n\pi) = \frac{e^{-2n\pi}}{2} (\sqrt{3} - 1)$$

であることより

$$\frac{F(2(n-1)\pi)}{F(2n\pi)} = e^{2\pi} > 1$$

$$\Leftrightarrow F(2(n-1)\pi) > F(2n\pi) (> 0)$$

となる。以上より

$$F\left(2(n-1)\pi + \frac{11}{6}\pi\right) < F(2n\pi) < F(2(n-1)\pi) < F\left(2(n-1)\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

であるから, $2(n-1)\pi \leq \theta \leq 2n\pi$ における関数 $F(\theta)$ の最大値 α_n , 最小値 β_n は

$$\alpha_n = F\left(2(n-1)\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{e^{-\left\{2(n-1)\pi + \frac{\pi}{6}\right\}}}{2} \left\{ \sqrt{3} + \sin\left(2(n-1)\pi + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2(n-1)\pi + \frac{\pi}{6}\right) \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{4} e^{-\left(2n-\frac{11}{6}\right)\pi}$$

$$\beta_n = F\left(2(n-1)\pi + \frac{11}{6}\pi\right)$$

$$= \frac{e^{-\left\{2(n-1)\pi + \frac{11}{6}\pi\right\}}}{2} \left\{ \sqrt{3} + \sin\left(2(n-1)\pi + \frac{11}{6}\pi\right) - \cos\left(2(n-1)\pi + \frac{11}{6}\pi\right) \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\left(2n-\frac{1}{6}\right)\pi}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = 2(n-1)\pi + \frac{\pi}{6} \text{ のとき最大値 } \alpha_n = \frac{\sqrt{3}+1}{4} e^{-\left(2n-\frac{11}{6}\right)\pi}$$

$$\theta = 2(n-1)\pi + \frac{11}{6}\pi \text{ のとき最小値 } \beta_n = \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\left(2n-\frac{1}{6}\right)\pi}$$

[4]

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(2n-\frac{11}{6}\right)\pi} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{4} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi}{6}}}{1-e^{-2\pi}} \left(\because |e^{-2\pi}| < 1 \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{4} \cdot \frac{e^{\frac{11}{6}\pi}}{e^{2\pi}-1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \cdot \frac{e^{\frac{11}{6}\pi}}{e^{2\pi}-1}$$

[1]

$$f(x) = \int_{-1}^x \{p - \log(1+|t|)\} dt$$

の両辺を x で微分すると

$$f'(x) = p - \log(1+|x|)$$

となる。 $f'(x) = 0$ となるとき

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow p - \log(1+|x|) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log(1+|x|) = p$$

$$\Leftrightarrow 1+|x| = e^p$$

$$\Leftrightarrow |x| = e^p - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm(e^p - 1)$$

となる。 $p > 0$ であることより $1 - e^p < 0$ となるから、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$1 - e^p$	$\cdots$	$e^p - 1$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(1 - e^p)$	$\nearrow$	$f(e^p - 1)$	$\searrow$

$x > 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-1}^x \{p - \log(1-t)\} dt + \int_0^x \{p - \log(1+t)\} dt \\ &= [pt + (1-t)\log(1-t) + t]_{-1}^0 + [pt - (1+t)\log(1+t) + t]_0^x \\ &= (p+1) - 2\log 2 + (p+1)x - (1+x)\log(1+x) \\ &= (p+1)(x+1) - (1+x)\log(1+x) - 2\log 2 \end{aligned}$$

である。よって、関数 $f(x)$ の極大値 $f(e^p - 1)$ は

$$\begin{aligned} f(e^p - 1) &= e^p(p+1) - e^p \log e^p - 2\log 2 \\ &= e^p - 2\log 2 \end{aligned}$$

である。また、 $x \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-1}^x \{p - \log(1-t)\} dt \\ &= [pt + (1-t)\log(1-t) + t]_{-1}^x \\ &= px + (1-x)\log(1-x) + x + p - 2\log 2 + 1 \\ &= (p+1)(x+1) + (1-x)\log(1-x) - 2\log 2 \end{aligned}$$

である。よって、関数 $f(x)$ の極小値 $f(1 - e^p)$ は

$$\begin{aligned} f(1 - e^p) &= (p+1)(2 - e^p) + e^p \log e^p - 2\log 2 \\ &= 2(p+1) - e^p - 2\log 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) 極大値 $e^p - 2\log 2$ 、極小値 $2(p+1) - e^p - 2\log 2$

[2]

$x > 0$ のとき

$$f(x) = (p+1)(x+1) - (1+x)\log(1+x) - 2\log 2$$

である。[1] の増減表から

$0 < x < e^p - 1$ のとき関数 $f(x)$ は単調増加関数であり、 $e^p - 1 < x$ のとき関数 $f(x)$ は単調減少関数である。さらに

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{(p+1)(x+1) - (1+x)\log(1+x) - 2\log 2\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x) \{(p+1) - \log(1+x)\} - 2\log 2 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

であることから、曲線 $y = f(x)$ が x 軸の正の部分と 2 点で交わるのは、 $f(e^p - 1) > 0$ かつ

$f(0) < 0$ のときである。ここで

$$\begin{aligned} f(e^p - 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow e^p - 2\log 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow e^p &> 2\log 2 \\ \Leftrightarrow p &> \log(2\log 2) \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} f(0) &< 0 \\ \Leftrightarrow p + 1 - 2\log 2 &< 0 \\ \Leftrightarrow p &< 2\log 2 - 1 \end{aligned}$$

である。いま、 $x > 0$ について $g(x) = x - 1 - \log x$ とおくと

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

となる。 $x > 1$ のとき $g'(x) > 0$ となるから $g(x)$ は単調増加関数となる。さらに $g(1) = 0$ であることから、 $x > 1$ のとき $g(x) > 0$ となる。よって、 $2\log 2 > 1$ であるから

$$\begin{aligned} g(2\log 2) &> 0 \\ \Leftrightarrow 2\log 2 - 1 - \log(2\log 2) &> 0 \\ \Leftrightarrow 2\log 2 - 1 &> \log(2\log 2) \end{aligned}$$

である。よって、 $p > \log(2\log 2)$ かつ $p < 2\log 2 - 1$ 、つまり、 $\log(2\log 2) < p < 2\log 2 - 1$ となる p は存在するため、求める p の値の範囲は $\log(2\log 2) < p < 2\log 2 - 1$ となる。

(答) $\log(2\log 2) < p < 2\log 2 - 1$