

平成26年度前期日程試験問題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は、4 ページあります。
3. 問題は **1** ～ **4** の4 題です。全問解答しなさい。
4. 試験開始後に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁がないことを確認し、ある場合には手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の針金綴じは、はずしてもかまいません。問題冊子の余白は下書き、計算用にも使用してもかまいません。
6. 解答用紙(別紙)は4 枚(A い～A に)です。
7. 各解答用紙の指定欄に、受験番号を記入しなさい。
8. 解答は、必ず解答用紙の指定箇所に記入しなさい。
9. 解答用紙は、持ち帰ってははいけません。
10. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

11. 解答用紙の「〔1〕 解」、 「〔2〕 解」などで始まる空白部分に論証過程や途中計算がわかるように記述して解答しなさい。「答」欄には設問の答えを記入しなさい。
12. 設問に「答えのみでよい」という指示のある場合には、「答」欄に設問の答えのみを記入しなさい。

- 1 r, s は実数で, $r > 0$ とする。O を原点とする座標空間に 4 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(r, r, r)$ がある。さらに, 点 E を, ベクトル $\overrightarrow{OE}$ が

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + s(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

で定まる点とする。次の問いに答えよ。

- [1] O, A, B, C を通る球面の中心を F とする。 $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OF}$ のなす角を θ とするとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。
- [2] $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ が成り立つとき, s を r の式で表せ。
- [3] [2] の条件 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ を満たし, さらに $|\overrightarrow{DE}| = r$, $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{OD} < 0$ を満たすような r の値を求めよ。

2 a, b を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ a & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ が

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たしている。次の問いに答えよ。

〔1〕 a, b の値を求めよ。ただし答えのみでよい。

〔2〕 m, n は実数で、 $m \neq 0, n \neq 0$ とする。座標平面上の 2 点 $S_1(m, 0)$, $S_2(0, n)$ をとり、行列 A が表す 1 次変換によって S_1, S_2 が移る点をそれぞれ S'_1, S'_2 とする。2 点 S'_1, S'_2 を通る直線が 2 点 S_1, S_2 を通る直線に一致するとき、 n を m の式で表せ。

〔3〕 2 点 $T_1(-7, 0)$, $T_2(0, 7)$ を通る直線を ℓ とする。行列 B が表す 1 次変換によって T_1, T_2 が移る点をそれぞれ T'_1, T'_2 とし、2 点 T'_1, T'_2 を通る直線を ℓ' とする。原点を中心とする半径 r の円を C とする。 C と ℓ が異なる 2 点で交わり、かつ C と ℓ' も異なる 2 点で交わるとする。このような r の値の範囲を求めよ。

〔4〕 〔3〕において、円 C が ℓ を切り取る線分の長さを L とし、円 C が ℓ' を切り取る線分の長さを L' とする。このような L, L' の中で、 L が最も小さい自然数になるときの L' の値を求めよ。

3 e は自然対数の底とする。O を原点とする座標平面に 3 点

$$A(e^{-\theta} + \sqrt{3}, e^{-\theta}), B(\cos \theta, \sin \theta), C(\sqrt{3}, 0)$$

がある。ただし、 $\theta \geq 0$ とする。次の問いに答えよ。

[1] 三角形 ABC の面積を $F(\theta)$ とする。 $F(\theta)$ を求めよ。

[2] $F(\theta)$ の導関数を $F'(\theta)$ とする。区間 $0 < \theta < 2\pi$ において $F'(\theta) = 0$ となる θ の値をすべて求めよ。

[3] n を自然数とする。区間 $2(n-1)\pi \leq \theta \leq 2n\pi$ における $F(\theta)$ の最大値、最小値をそれぞれ α_n, β_n とする。 α_n, β_n を求めよ。また最大値を与える θ の値と最小値を与える θ の値を求めよ。

[4] [3] で求めた $\alpha_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ に対して、 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ とおく。 S の値を求めよ。

4 p を正の実数とする。関数

$$f(x) = \int_{-1}^x \{p - \log(1 + |t|)\} dt$$

について、次の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数とする。

〔1〕 $f(x)$ の極値を求めよ。

〔2〕 xy 平面の曲線 $y = f(x)$ が x 軸の正の部分と 2 点で交わるような、 p の値の範囲を求めよ。