

〔1〕

与えられた条件より,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = 2, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 18, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 27$$

である。点Dが平面OABに関して点Cと対称な点であるためには

$$\begin{cases} \text{ベクトル } \overrightarrow{CD} \text{ は平面 OAB に対して垂直である} & \dots \textcircled{1} \\ \text{線分 CD の中点は平面 OAB 上にある} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

の2つの条件を満たすことが必要十分である。ここで①は

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \\ \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} s\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + (u-1)\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \\ s\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + (u-1)\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2s + u - 1 = 0 \\ 18t + 27u - 27 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2s + u - 1 = 0 \\ 2t + 3u - 3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

と変形できる。さらに②より、線分CDの中点をMとおくとベクトル $\overrightarrow{OM}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2} \\ &= \frac{s}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{t}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{u+1}{2}\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

と表すことができ、点Mが平面OAB上にあり、点Cは平面OAB上にないことから、これは $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ のみで表すことができる。よって,

$$\frac{u+1}{2} = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

が得られる。以上①, ②, ③を連立して解くことにより、実数 s, t, u は

$$s = 1, t = 3, u = -1$$

と求まる。

(答) $s = 1, t = 3, u = -1$

〔2〕

四面体OABCについて、 $\triangle OAB$ を底面とすれば線分CMを高さと考えることができる。ここで、 $\triangle OAB$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 18 - 0^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

であり、〔1〕の結果よりベクトル $\overrightarrow{CM}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\ &= (-2, -2, 1) \end{aligned}$$

と成分表示できるから、線分CMの長さは

$$\begin{aligned} CM &= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

と求まる。したがって、四面体OABCの体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \triangle OAB \cdot CM &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

である。

(答) 3

〔3〕

点Oから平面ABCに下ろした垂線の足を点Hとおくと、点Oと平面ABCの距離は線分OHの長さに一致する。また、〔2〕と同様に考えて、四面体OABCについて $\triangle ABC$ を底面とすれば線分OHを高さと考えることができる。ここで、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{20 \cdot 50 - 28^2} \\ &= 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

であり、〔2〕の結果より四面体OABCの体積は3であるから、線分OHの長さは

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot OH &= 3 \\ \therefore OH &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

2

[1]

$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$ の両辺を r 倍して、以下のように引き算を行い整理すると

$$\begin{array}{r} S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1} \\ -) \quad rS_n = \quad +r + 2r^2 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \\ \hline (1-r)S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n \end{array}$$

$$\therefore S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$$

となる。したがって、 S の値は

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \frac{1-0}{(1-r)^2} - \frac{0}{1-r} \quad (\because |r| < 1 \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0) \\ &= \frac{1}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{(1-r)^2}$$

[2] (1)

p_1 は A が的に向かって1回矢を射るとき命中する確率であるから

$$p_1 = \frac{4}{5}$$

であり、 q_1 は A, B が的に向かってそれぞれ1回矢を射るとき A の射る矢が命中せず、かつ B の射る矢が命中する確率であるから

$$q_1 = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

である。よって、求める確率 $p_1 + q_1$ は

$$p_1 + q_1 = \frac{4}{5} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{10}$$

(2)

$n \geq 2$ のとき、 p_n は A, B が的に向かってそれぞれ n 回矢を射るとき、1回目から $(n-1)$ 回目まで A, B の射る矢は命中せず、かつ n 回目に A の射る矢が命中する確率であるから

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{4}{5} \\ &= \frac{4}{5} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

(3)

$n \geq 2$ のとき、 q_n は A, B が的に向かってそれぞれ n 回矢を射るとき、1回目から n 回目まで A の射る矢は命中せず、かつ1回目から $(n-1)$ 回目まで B の射る矢は命中せず n 回目に B の射る矢が命中する確率であるから

$$\begin{aligned} q_n &= \left(1 - \frac{4}{5}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{10}\right)^n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

[3]

$E_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)p_k$ とおくと、求める値は

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$$

である。ここで、[2] (1), (2) の結果より $n \geq 1$ のとき、 $p_n = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ である。よって、

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=1}^n (2k-1)p_k \\ &= \sum_{k=1}^n (2k-1) \cdot \frac{4}{5} \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} \\ &= \frac{4}{5} \left\{ 2 \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} \right\} \end{aligned}$$

となるが、[1] の結果より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)^2} \\ &= \frac{100}{81} \end{aligned}$$

であり、無限等比級数に関する公式より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{10}{9} \end{aligned}$$

となる。したがって、求める極限值は

$$\begin{aligned} E &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5} \left(2 \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} \right) \\ &= \frac{4}{5} \left(2 \cdot \frac{100}{81} - \frac{10}{9} \right) \\ &= \frac{88}{81} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad E = \frac{88}{81}$$

[1]

関数 $f(x) = e^{-x}x^2(x^2 + ax + b)$ の導関数 $f'(x)$ は、積の微分公式より

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{-x})' \{x^2(x^2 + ax + b)\} + e^{-x} \{x^2(x^2 + ax + b)\}' \\ &= -e^{-x}(x^4 + ax^3 + bx^2) + e^{-x}(4x^3 + 3ax^2 + 2bx) \\ &= e^{-x}x\{-x^3 - (a-4)x^2 + (3a-b)x + 2b\} \end{aligned}$$

と求まる。よって、問題で与えられた条件より、実数 a, b は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(-1) = 10e \\ f'(1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (-a+b+1)e = 10e \\ (2a+b+3)e^{-1} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a-b = -9 \\ 2a+b = -3 \end{cases} \\ &\therefore a = -4, b = 5 \end{aligned}$$

であることがわかる。

(答) $a = -4, b = 5$

[2]

[1] の結果より、関数 $f(x), f'(x)$ は

$$f(x) = e^{-x}x^2(x^2 - 4x + 5)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}x(-x^3 + 8x^2 - 17x + 10) \\ &= -xe^{-x}(x-1)(x-2)(x-5) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(0) = 0, f(1) = \frac{2}{e}, f(2) = \frac{4}{e^2}, f(5) = \frac{250}{e^5}$ であるから、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	1	...	2	...	5	...
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+		-
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\nearrow$	$\frac{250}{e^5}$	$\searrow$

さらに、極大値 $f(1) = \frac{2}{e}, f(5) = \frac{250}{e^5}$ について

$$\begin{aligned} f(1) - f(5) &= \frac{2}{e} - \frac{250}{e^5} \\ &= \frac{2e^4 - 250}{e^5} \\ &< \frac{2 \cdot 3^4 - 250}{e^5} \quad (\because 2 < e < 3) \\ &= \frac{162 - 250}{e^5} \\ &< 0 \\ \therefore f(1) &< f(5) \end{aligned}$$

である。また、 $x > 0$ において、

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}x^2(x^2 - 4x + 5) \\ &= e^{-x}x^2\{(x-2)^2 + 1\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となる。よって、関数 $f(x)$ は $x = 5$ で最大値 $f(5) = \frac{250}{e^5}$ をとり、 $x = 0$ で最小値 $f(0) = 0$ をとることがわかる。

(答) 最大値 $\frac{250}{e^5}$ ($x = 5$)、最小値 0 ($x = 0$)

[1]

区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ において、不等式 $f(x) > 0$ は

$$\begin{aligned}
 f(x) &> 0 \\
 \Leftrightarrow \cos x + \sin x - 1 &> 0 \\
 \Leftrightarrow \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) &> 1 \\
 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &> \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi & \\
 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2} &
 \end{aligned}$$

と解ける。

$$(\text{答}) \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

[2]

不定積分 $\int xf(x)dx$ は、部分積分により

$$\begin{aligned}
 \int xf(x)dx &= \int x(\cos x + \sin x - 1)dx \\
 &= \int x(\cos x + \sin x)dx - \int xdx \\
 &= x(\sin x - \cos x) - \int (\sin x - \cos x)dx - \frac{x^2}{2} \\
 &= x(\sin x - \cos x) - (-\cos x - \sin x) - \frac{x^2}{2} + C \\
 &= (1+x)\sin x + (1-x)\cos x - \frac{x^2}{2} + C
 \end{aligned}$$

と求まる。ただし、 C は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad \int xf(x)dx = (1+x)\sin x + (1-x)\cos x - \frac{x^2}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

[3]

[1] の結果より

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } f(x) \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \text{ のとき } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

であるから、[2] の結果を用いることによって、定積分 $\int_0^{2\pi} t|f(t)|dt$ の値は

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} t|f(t)|dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} t(-f(t))dt \\
 &= \left[(1+t)\sin t + (1-t)\cos t - \frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-(1+t)\sin t - (1-t)\cos t + \frac{t^2}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \\
 &= \left\{ \left(1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8} \right) - 1 \right\} + \left\{ (-1 + 2\pi + 2\pi^2) - \left(-1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8} \right) \right\} \\
 &= 3\pi + \frac{7}{4}\pi^2
 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{2\pi} t|f(t)|dt = 3\pi + \frac{7}{4}\pi^2$$

[4]

定積分 $\int_0^{2\pi} tg(t)dt$ の値は定数であるから、 A を定数として $\int_0^{2\pi} tg(t)dt = A$ とおくと

$$g(x) = |f(x)| - \frac{1}{4\pi^2}(A - 3\pi)$$

となる。関数 $g(x)$ のこの表示から、定積分 $\int_0^{2\pi} tg(t)dt$ の値を求めると

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} tg(t)dt &= \int_0^{2\pi} t \left\{ |f(t)| - \frac{1}{4\pi^2}(A - 3\pi) \right\} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} t|f(t)|dt - \frac{1}{4\pi^2}(A - 3\pi) \int_0^{2\pi} tdt \\
 &= \left(3\pi + \frac{7}{4}\pi^2 \right) - \frac{1}{4\pi^2}(A - 3\pi) \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} \quad (\because [3]) \\
 &= 3\pi + \frac{7}{4}\pi^2 - \frac{1}{2}(A - 3\pi)
 \end{aligned}$$

となる。よって、定数 A は

$$\begin{aligned}
 A &= 3\pi + \frac{7}{4}\pi^2 - \frac{1}{2}(A - 3\pi) \\
 \therefore A &= 3\pi + \frac{7}{6}\pi^2
 \end{aligned}$$

と求まるから、関数 $g(x)$ は

$$\begin{aligned}
 g(x) &= |f(x)| - \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left(3\pi + \frac{7}{6}\pi^2 \right) - 3\pi \right\} \\
 &= |\cos x + \sin x - 1| - \frac{7}{24}
 \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad g(x) = |\cos x + \sin x - 1| - \frac{7}{24}$$