

平成28年度前期日程試験問題

数 学 (Z)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は、4ページあります。
3. 問題は **1** ~ **4** の4題です。全問解答しなさい。
4. 試験開始後に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁がないことを確認し、ある場合には手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の針金綴じは、はずしてもかまいません。問題冊子の余白は下書き、計算用に使用してもかまいません。
6. 解答用紙(別紙)は4枚(Aい~Aに)です。
7. 各解答用紙の指定欄に、受験番号を記入しなさい。
8. 解答は、必ず解答用紙の指定箇所^とに記入しなさい。
9. 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
10. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

11. 解答用紙の「〔1〕 解」, 「〔2〕 解」などで始まる空白部分に、論証過程や計算過程がわかるように解答しなさい。「答」欄には設問の答えを記入しなさい。
12. 設問に「答えのみでよい」という指示のある場合には、「答」欄に設問の答えのみを記入しなさい。

- 1 Oを原点とする座標空間に4点 $A(1, -2, -2)$, $B(-1, -4, 0)$, $C(2, 2, -4)$, $D(2, 4, -4)$ をとる。また、線分ABを $t:(1+t)$ に外分する点をP、線分OBを3:2に外分する点をQとおく。ただし、 t は正の実数とする。次の問いに答えよ。

〔1〕 ベクトル $\overrightarrow{OP}$ の成分を t を用いて表せ。ただし答えのみでよい。

〔2〕 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CP}$ が垂直であるとき、 t の値を求めよ。

〔3〕 実数 r, s について $\overrightarrow{DP} = r\overrightarrow{DC} + s\overrightarrow{DQ}$ が成り立つとする。このとき、 r, s, t の値を求めよ。

〔4〕 t が〔3〕で求めた値のとき、直線DPと直線CQの交点の座標を求めよ。

〔5〕 $\triangle CDP$ の面積を $S(t)$ とする。 $S(t)$ の最小値を求めよ。また、そのときの t の値を求めよ。

2 n を自然数とし、 a, b, r は実数で $b > 0, r > 0$ とする。複素数 $w = a + bi$ は $w^2 = -2\bar{w}$ を満たすとする。 $\alpha_n = r^{n+1} w^{2-3n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。ただし、 i は虚数単位とし、複素数 z に共役な複素数を $\bar{z}$ で表す。次の問いに答えよ。

〔1〕 a と b の値を求めよ。

〔2〕 複素数平面上の3点 $O(0), A(\alpha_1), B(\bar{\alpha}_1)$ について、 $\angle AOB$ の大きさを θ とする。ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。 θ の値を求めよ。

〔3〕 α_n の実部を c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。 c_n を n と r を用いて表せ。

〔4〕 〔3〕で求めた c_n を第 n 項とする数列 $\{c_n\}$ について、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が収束し、その和が $\frac{8}{3}$ となるような r の値を求めよ。

3 a を正の実数とし、 x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-ax} \tan^2 x \quad \left(-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}\right)$$

で定める。ただし、 e は自然対数の底とする。次の問いに答えよ。

[1] $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする。 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ が成り立つとき、 a の値を求めよ。

[2] $f'(x) = 0$ かつ $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ を満たす x がちょうど 3 個存在するように、定数 a の値の範囲を定めよ。

[3] a の値が [2] で定めた範囲にあるとする。このとき、方程式 $f'(x) = 0$ の解を x_1, x_2, x_3 $\left(-\frac{\pi}{3} < x_1 < x_2 < x_3 < \frac{\pi}{3}\right)$ とし、

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3)$$

とおく。

(1) y_1, y_2, y_3 を大きさの順に並べよ。

(2) $\tan x_3$ を a の式で表せ。

4 xy 平面上の 2 つの曲線

$$C_1: y = \log x + 2 \quad (x > 0)$$

$$C_2: y = -\log x \quad (x > 0)$$

を考える。正の実数 p, q について、点 $P(p, \log p + 2)$ における C_1 の接線を ℓ_1 とし、点 $Q(q, -\log q)$ における C_2 の接線を ℓ_2 とする。また、 ℓ_1 と ℓ_2 は垂直であるとする。ただし、対数は自然対数とする。次の問いに答えよ。

〔1〕 q を p を用いて表せ。ただし答えのみでよい。

〔2〕 ℓ_2 の方程式を p を用いて表せ。

〔3〕 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とする。 $\angle RPQ = \frac{\pi}{3}$ であるとき、線分 PQ 、曲線 C_1 および曲線 C_2 で囲まれた部分の面積 S を求めよ。